2023

PHYSICS — MINOR

Paper : MN-1

(Basic Physics-I)

Full Marks : 75

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১। ***যে-কোনো পাঁচটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৩×৫

(ক) p -এর কোন মানের জন্য দুটি ভেক্টর $\vec{A} = p\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = -2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ পরস্পরের লম্ব হবে?

(খ) বল $F = A \cos(pt) + B \sin(qs)$। যদি t এবং s যথাক্রমে সময় এবং দূরত্ব হয়, তবে $\frac{p}{A}$ এবং $\frac{q}{B}$ -এর মাত্রা নির্ণয় করো।

(গ) গোলীয় নির্দেশতন্ত্র (r, θ, ϕ) ব্যবহার করে 'a' ব্যাসার্ধের গোলকের আয়তন নির্ণয় করো।

(ঘ) $\hat{i}$ এবং $\hat{j}$ -এর সাপেক্ষে $\hat{r}$ এবং $\hat{\theta}$-এর রাশিমালা লেখো। দেখাও যে $\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$ (প্রতীকগুলি প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত)।

(ঙ) দুটি বস্তুর গতি সংক্রান্ত সমস্যায় হ্রাসপ্রাপ্ত ভরের সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে হ্রাসপ্রাপ্ত ভরের মান যে-কোনো একটি ভরের চাইতে কম।

(চ) কেপলারের সূত্রগুলি বিবৃত করো।

(ছ) অসংনম্য প্রবাহীর ক্ষেত্রে ধারারেখ প্রবাহ বলতে কী বোঝো?

(জ) রেনল্ডসের সংখ্যা কী? এই সংখ্যার তাৎপর্য লেখো।

প্রত্যেক বিভাগ থেকে অন্ততঃ ***একটি*** করে নিয়ে ***মোট পাঁচটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও।

বিভাগ - ক

২। (ক) দেখাও যে $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = \vec{0}$, যেখানে $\phi = \phi(x, y, z)$ একটি স্কেলার অপেক্ষক।

(খ) $\vec{F} = x(x-y)\hat{i} + y(y-z)\hat{j} + z(z-x)\hat{k}$ ভেক্টরটির $(1, -2, 1)$ বিন্দুতে ডাইভারজেন্স নির্ণয় করো।

(গ) একটি ভেক্টরের রৈখিক সমাকল বলতে কী বোঝো? স্টোকসের সূত্র বিবৃত করো এবং এর গাণিতিক রূপ লেখো।

৪+৪+(১+৩)

৩। (ক) $(1 + e^{-x})$ অপেক্ষকটির লেখচিত্র আঁকো, যেখানে $0 \leqslant x < \infty$।

(খ) $x = 1$ বিন্দুর সাপেক্ষে $\frac{1}{x}$-এর টেলর বিস্তৃতি নির্ণয় করো।

(গ) অবকল সমীকরণটি সমাধান করো : $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = e^{2x}$

(ঘ) দেখাও যে $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, যেখানে $u = e^x \sin y$। ২+৩+৪+৩

৪। (ক) দেখাও যে $\frac{1}{3} \oiint_S \vec{r} \cdot d\vec{S} = V$,

যেখানে $\vec{r}$ হল স্থান ভেক্টর এবং V হল S তল দিয়ে আবদ্ধ আয়তন।

(খ) (অ) একটি চোঙাকৃতি নির্দেশতন্ত্র (ρ, ϕ, z)-এর চিত্র আঁকো। প্রতিটি রাশির সীমা লেখো।

(আ) দেখাও যে, একটি চোঙাকৃতি নির্দেশতন্ত্রে একক ভেক্টরগুলি পরস্পরের লম্ব।

(ই) চোঙাকৃতি নির্দেশতন্ত্রে একটি কণার স্থান ভেক্টরটি লেখো। ৩+{(২+২)+৩+২}

বিভাগ - খ

৫। (ক) দুটি জড়ত্বীয় নির্দেশতন্ত্র S এবং S'-এর মধ্যে গ্যালিলিওর রূপান্তর সমীকরণ লেখো যেখানে S', S-এর সাপেক্ষে সাধারণ x-x' অক্ষ বরাবর সমবেগে গতিশীল। দেখাও যে নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র গ্যালিলিওর রূপান্তরে অপরিবর্তিত থাকে।

(খ) ধনাত্মক X অক্ষ বরাবর গতিশীল একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল অবমন্দন বল $F_r = -kv$, যেখানে k একটি ধ্রুবক। কণাটির প্রারম্ভিক অবস্থান x_0 এবং প্রারম্ভিক গতিবেগ v_0 হলে সময়ের সাপেক্ষে কণাটির সরণ ও গতিবেগের রাশিমালা নির্ণয় করো।

(গ) (অ) সংরক্ষী বল বলতে কী বোঝো? দুটি উদাহরণ দাও।

(আ) দেখাও যে সংরক্ষী বলক্ষেত্রে কোনো একটি কণার গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির যোগফল সর্বদা ধ্রুবক থাকে। (১+২)+৩+[(২+১)+৩]

৬। (ক) একটি কণাগোষ্ঠীর ভরকেন্দ্রের সংজ্ঞা দাও। একটি কণাগোষ্ঠীতে 3 gm ভরের স্থানাঙ্ক (1, 0, –1), 5 gm ভরের স্থানাঙ্ক (–2, 1, 3) এবং 2 gm ভরের স্থানাঙ্ক (3, – 1, 1)। ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

(খ) দেখাও যে, একটি কণাগোষ্ঠীর ক্ষেত্রে, মোট গতিশক্তি ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে গতিশক্তি এবং ভরকেন্দ্রের গতিশক্তির সমষ্টি।

(গ) একটি বস্তু কেন্দ্রগ বল $F(R)$-এর আকর্ষণে বলকেন্দ্রের চারদিকে R ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে প্রদক্ষিণ করে। $F(R) \propto R^{-3/2}$ হলে বস্তুর পর্যায়কাল T-এর সঙ্গে R-এর সম্পর্ক নির্ণয় করো। (২+৩)+৪+৩

৭। (ক) স্থিতিস্থাপক ও অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলতে কী বোঝো?

(খ) সমান ভর 'm' বিশিষ্ট দুটি কণা একই সরলরেখা বরাবর u_1 এবং u_2 গতিবেগে পরস্পরের দিকে চলছে। স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের পরে কণাদুটির অন্তিম গতিবেগ v_1 ও v_2-এর রাশিমালা নির্ণয় করো।

(গ) দেখাও যে কেন্দ্রগ বলের অধীনে গতিশীল কোনো কণার গতিপথ সর্বদা এক সমতলে থাকে।

(ঘ) x-অক্ষ বরাবর একটি কণা $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$; $k > 0$ স্থিতিশক্তির অধীনে চলমান।

(অ) সাম্যবিন্দু নির্ণয় করো।

(আ) সাম্যাবস্থার প্রকৃতি পর্যালোচনা করো। ২+৪+২+(২+২)

৮। xy-সমতলে m ভরের গতিশীল একটি কণার স্থান ভেক্টর হল $\vec{r} = a\cos\omega t\,\hat{i} + b\sin\omega t\,\hat{j}$; যেখানে a, b এবং ω ধনাত্মক ধ্রুবক এবং $a > b$।

(ক) দেখাও যে কণাটির গতিপথ উপবৃত্তাকার।

(খ) দেখাও যে কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বল সর্বদাই কেন্দ্র অভিমুখী।

(গ) মূলবিন্দু সাপেক্ষে কণাটির কৌণিক ভরবেগ ও ক্রিয়াশীল ভ্রামক-এর মান নির্ণয় করো। ৩+৩+(৩+৩)

৯। (ক) ধারারেখ প্রবাহের ক্ষেত্রে, ধারাবাহিকতার সমীকরণ (equation of continuity) নির্ণয় করো।

(খ) শান্ত অসংনম্য প্রবাহীর গতির জন্য অয়লারের সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করো। এই সমীকরণ থেকে কীভাবে পাস্কালের সূত্র পাওয়া যায়?

(গ) একটি খোলামুখ পাত্রে তরলের উপরিতল h_1 উচ্চতায় আছে। নীচ থেকে h_2 উচ্চতায় পাত্রের গায়ে একটি ছোট ছিদ্র আছে। তরলের নিঃসরণ বেগ নির্ণয় করো। ৩+(৪+১)+৪

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

1. Answer ***any five*** questions : 3×5

(a) For what value of p, the two vectors $\vec{A} = p\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$ and $\vec{B} = -2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ will be perpendicular to each other?

(b) Force $F = A\cos(pt) + B\sin(qs)$. If t and s are the time and distance respectively, find the dimension of $\frac{p}{A}$ and $\frac{q}{B}$.

(c) Find the volume of a sphere of radius 'a' using spherical coordinates (r, θ, ϕ).

(d) Write down the expressions for $\hat{r}$ and $\hat{\theta}$ in terms of $\hat{i}$ and $\hat{j}$. Hence, show that $\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$. (Symbols have their usual meanings).

(e) Define reduced mass for a two-body problem. Show that it is less than any one of the masses.

(f) Write down the Kepler's Laws.

(g) What do you mean by Streamline flow of an incompressible fluid?

(h) What is Raynolds number? Explain its significance.

Answer ***any five*** questions, taking at least ***one*** question from ***each group***.

Group - A

2. (a) Show that $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\phi\right) = \vec{0}$, where $\phi = \phi(x, y, z)$ is a scalar function.

(b) Find the divergence of the vector $\vec{F} = x(x-y)\hat{i} + y(y-z)\hat{j} + z(z-x)\hat{k}$ at point $(1, -2, 1)$.

(c) What do you mean by line integral of a vector? State Stoke's theorem and write down its mathematical form. 4+4+(1+3)

3. (a) Draw the graph of the function : $(1 + e^{-x})$; where $0 \leqslant x < \infty$.

(b) Expand $\frac{1}{x}$ about the point $x = 1$ in Taylor's series.

(c) Solve the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = e^{2x}$

(d) Show that $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, where $u = e^x \sin y$. 2+3+4+3

4. (a) Show that $\frac{1}{3}\oiint_S \vec{r} \cdot d\vec{S} = V$, where $\vec{r}$ is the position vector and V is the volume enclosed by the closed surface S.

(b) (i) Draw a cylindrical coordinate system (ρ, ϕ, z). Indicate the range of each coordinates.

(ii) Show that the unit vectors in cylindrical coordinate system are orthogonal.

(iii) Write down the position vector of a particle in cylindrical coordinates. 3+{(2+2)+3+2

Group - B

5. (a) Write down the Galilean transformation relations between two inertial frames S and S' where S' is moving along common x-x' axis with respect to S with constant velocity. Show that Newton's Second Law of motion is invariant under Galilean transformation.

   (b) Find the velocity and position as a function of time for a particle initially having velocity v_0 along the positive X axis at position x_0 and experiencing a linear retarding force $F_r = -kv$, k being a constant.

   (c) (i) What is conservative force? Give two examples.

   (ii) Show that the sum of kinetic and potential energies of a particle is constant in a conservative force field.

(1+2)+3+[(2+1)+3]

6. (a) Define centre of mass of a system of particles. A system of particles consists of a 3 gm. mass located at (1, 0, –1), a 5 gm. mass at (–2, 1, 3) and a 2 gm. mass at (3, – 1, 1). Find the position of the centre of mass.

   (b) Prove that the total kinetic energy of a system of particles is equal to the kinetic energy of translation of centre of mass plus the kinetic energy of the motion about the centre of mass.

   (c) A particle is moving in a circular orbit of radius R under a central force $F(R)$, where $F(R) \propto R^{-3/2}$. Find the relation between time period (T) and R.

(2+3)+4+3

7. (a) What are elastic and inelastic collisions?

   (b) Two particles of identical mass m are moving towards each other along the same straight line with velocities u_1 and u_2 respectively. Find the expressions of velocities v_1 and v_2 of the particles after the elastic collision.

   (c) Show that for a body moving under the central force, the motion is always confined in a plane.

   (d) A particle moves along the x-axis under a potential $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$; $k > 0$.

   (i) Determine the point of equilibrium.

   (ii) Investigate the nature of equilibrium.

2+4+2+(2+2)

8. A particle of mass m moves in xy-plane so that its position vector is $\vec{r} = a\cos\omega t\,\hat{i} + b\sin\omega t\,\hat{j}$; where a, b and ω are positive constants and $a > b$.

   (a) Show that the particle moves in an ellipse.

   (b) Show that the force acting on the particle is always directed towards the origin.

   (c) Find the torque and the angular momentum of the particle about the origin.

3+3+(3+3)

9. (a) Derive the equation of continuity in a streamline fluid motion.

(b) Establish Euler's equation of steady incompressible fluid motion. How Pascal's Law is derived from Euler's equation?

(c) The upper surface of a fluid is at a height h_1 in an open container. There is a small hole at the side wall at a height h_2 from the bottom. Find the velocity of efflux. 3+(4+1)+4