1B
Chapter

ভেক্টর বিশ্লেষণ

Vector Analysis

At A Glance

Derivatives of a vector with respect to a parameter. Gradient, divergence and curl. Vector integration, line, surface and volume integrals of vector fields. Gauss' divergence theorem and Stokes' theorem of vectors (statement only)

1B.1 ভেক্টরের অবকলন (The Derivative of a Vector)

একটি ভেক্টর $\vec{A}$ -কে একটি স্কেলার চলরাশি t (ধরা যাক, সময়)-এর অপেক্ষক বলা যায় যদি একটি নির্দিষ্ট অবকাশ বা অঞ্চলে t-এর প্রতি মানের জন্য একটি $\vec{A}(t)$-এর অস্তিত্ব থাকে। এক্ষেত্রে $\vec{A}$ হল t-এর অপেক্ষক অর্থাৎ $\vec{A} = \vec{A}(t)$। কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের X, Y ও Z অক্ষ বরাবর ভেক্টরটির উপাংশগুলি যথাক্রমে $A_1(t)$, $A_2(t)$ এবং $A_3(t)$ হলে,

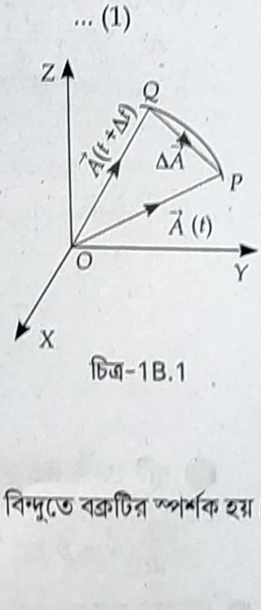
$$\vec{A}(t) = \hat{i}A_1(t) + \hat{j}A_2(t) + \hat{k}A_3(t) \qquad \text{... (1)}$$

এখন t-এর মান পরিবর্তিত হয়ে t থেকে $t + \Delta t$ হলে $\vec{A}(t)$-এর পরিবর্তন যদি $\Delta\vec{A}$ হয় তবে,

$$\Delta\vec{A} = \overrightarrow{PQ} = \vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t) \qquad \text{... (2) [চিত্র 1B.1]}$$

$\therefore$ t-এর সাপেক্ষে ভেক্টর $\vec{A}$ -এর পরিবর্তনের হার,

$$\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta t} = \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t} \qquad \text{... (3)}$$



চিত্র-1B.1

এখন, চলরাশি t-এর পরিবর্তন $\Delta t \to 0$ হলে $\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}$ -এর সীমাস্থ মানকেই t-এর সাপেক্ষে $\vec{A}(t)$-এর অবকলন বলা হয়। একে $\frac{d\vec{A}}{dt}$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

$$\therefore \frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}$$

এক্ষেত্রে বলা বাহুল্য, $\Delta t \to 0$ হলে, Q বিন্দুটি P বিন্দুর উপর প্রায় সমাপতিত হয় এবং PQ, P বিন্দুতে বক্রটির স্পর্শক হয়। ফলে $\frac{d\vec{A}}{dt}$, $\vec{P}$ বিন্দুতে বক্রটির স্পর্শক অভিমুখে একটি ভেক্টর হয়।

$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}$ হল t-এর সাপেক্ষে $\vec{A}$ -এর দ্বিতীয় ক্রমের অবকলন।

$$\therefore \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)$$

কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক অক্ষ বরাবর উপাংশগুলির আকারে লেখা যায়,

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{d}{dt}\{\hat{i}A_1(t)+\hat{j}A_2(t)+\hat{k}A_3(t)\}=\hat{i}\frac{dA_1(t)}{dt}+\hat{j}\frac{dA_2(t)}{dt}+\hat{k}\frac{dA_3(t)}{dt}$$

ভেক্টরের অবকলনের কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ নিয়ম (Some important rules of vector differentiation) ঃ

1. ভেক্টর যোগফলের/বিয়োগফলের অবকলন (Differentiation of vector sum/difference) ঃ যদি $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ উভয়ই t-এর অপেক্ষক এবং অবকলনযোগ্য ভেক্টর হয় তবে,

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\pm\vec{B})=\frac{d\vec{A}}{dt}\pm\frac{d\vec{B}}{dt}$$

প্রমাণ ঃ $\frac{d}{dt}(\vec{A}\pm\vec{B})=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\{\vec{A}(t+\Delta t)\pm\vec{B}(t+\Delta t)\}-\{\vec{A}(t)\pm\vec{B}(t)\}}{\Delta t}$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}\right\}\pm\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{\vec{B}(t+\Delta t)-\vec{B}(t)}{\Delta t}\right\}$$

$$=\frac{d\vec{A}}{dt}\pm\frac{d\vec{B}}{dt}$$ (প্রমাণিত)

2. দুটি ভেক্টরের ডট গুণফলের অবকলন (Differentiation of scalar product of two vectors) ঃ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর যদি স্কেলার চলরাশি t-এর অবকলনযোগ্য ভেক্টর অপেক্ষক হয় তবে,

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}+\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}$$

প্রমাণ ঃ ধরা যাক, $\vec{A}=\hat{i}A_1+\hat{j}A_2+\hat{k}A_3$ এবং $\vec{B}=\hat{i}B_1+\hat{j}B_2+\hat{k}B_3$

$$\therefore \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}+\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}=(\hat{i}A_1+\hat{j}A_2+\hat{k}A_3)\cdot\left(\hat{i}\frac{dB_1}{dt}+\hat{j}\frac{dB_2}{dt}+\hat{k}\frac{dB_3}{dt}\right)$$

$$+\left(\hat{i}\frac{dA_1}{dt}+\hat{j}\frac{dA_2}{dt}+\hat{k}\frac{dA_3}{dt}\right)\cdot(\hat{i}B_1+\hat{j}B_2+\hat{k}B_3)$$

$$=\left(A_1\frac{dB_1}{dt}+A_2\frac{dB_2}{dt}+A_3\frac{dB_3}{dt}\right)+\left(\frac{dA_1}{dt}\cdot B_1+\frac{dA_2}{dt}\cdot B_2+\frac{dA_3}{dt}\cdot B_3\right)$$

$$=\left(A_1\cdot\frac{dB_1}{dt}+\frac{dA_1}{dt}\cdot B_1\right)+\left(A_2\cdot\frac{dB_2}{dt}+\frac{dA_2}{dt}\cdot B_2\right)+\left(A_3\cdot\frac{dB_3}{dt}+\frac{dA_3}{dt}\cdot B_3\right)$$

$$=\frac{d}{dt}(A_1B_1)+\frac{d}{dt}(A_2B_2)+\frac{d}{dt}(A_3B_3)$$

$$=\frac{d}{dt}(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)=\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$ (প্রমাণিত)

3. দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণফলের অবকলন (Differentiation of cross product of two vectors) ঃ

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$

প্রমাণ ঃ ধরা যাক, $\vec{A}=\hat{i}A_1+\hat{j}A_2+\hat{k}A_3$ এবং $\vec{B}=\hat{i}B_1+\hat{j}B_2+\hat{k}B_3$

$$\therefore \vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{dA_1}{dt} & \frac{dA_2}{dt} & \frac{dA_3}{dt}\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ \frac{dB_1}{dt} & \frac{dB_2}{dt} & \frac{dB_3}{dt}\end{vmatrix}$$

$$= \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt} \text{ (প্রমাণিত)}$$

❹ একটি স্কেলার ও ভেক্টরের গুণফলের অবকলন (Differentiation of the product of a scalar and a vector) ঃ

$\vec{A}$ একটি অবকলনযোগ্য ভেক্টর এবং ϕ একটি অবকলনযোগ্য স্কেলার অপেক্ষক হলে,

$$\frac{d}{dt}(\phi\vec{A}) = \phi\frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\phi}{dt}\vec{A}$$

● **প্রমাণ ঃ** ধরা যাক, $\vec{A} = \hat{i}A_1 + \hat{j}A_2 + \hat{k}A_3$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\phi\vec{A}) = \frac{d}{dt}(\hat{i}\phi A_1 + \hat{j}\phi A_2 + \hat{k}\phi A_3)$$

$$= \hat{i}\frac{d}{dt}(\phi A_1) + \hat{j}\frac{d}{dt}(\phi A_2) + \hat{k}\frac{d}{dt}(\phi A_3)\left[\because \frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{d\hat{j}}{dt} = \frac{d\hat{k}}{dt} = 0\right]$$

$$= \hat{i}\left(\frac{d\phi}{dt}\cdot A_1 + \phi\cdot\frac{dA_1}{dt}\right) + \hat{j}\left(\frac{d\phi}{dt}\cdot A_2 + \phi\cdot\frac{dA_2}{dt}\right) + \hat{k}\left(\frac{d\phi}{dt}\cdot A_3 + \phi\cdot\frac{dA_3}{dt}\right)$$

$$= \phi\left(\hat{i}\frac{dA_1}{dt} + \hat{j}\frac{dA_2}{dt} + \hat{k}\frac{dA_3}{dt}\right) + \frac{d\phi}{dt}\cdot(\hat{i}A_1 + \hat{j}A_2 + \hat{k}A_3)$$

$$= \phi\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\phi}{dt}\cdot\vec{A} \text{ (প্রমাণিত)}$$

❺ একটি স্কেলার ধ্রুবক এবং একটি ভেক্টর অপেক্ষকের গুণফলের অবকলন (Differentiation of the product of a vector function with a scalar constant) ঃ

c একটি স্কেলার ধ্রুবক এবং $\vec{A} = \hat{i}A_1 + \hat{j}A_2 + \hat{k}A_3$, t-এর একটি অবকলনযোগ্য ভেক্টর অপেক্ষক হলে,

$$\frac{d}{dt}(c\vec{A}) = c\frac{d\vec{A}}{dt}$$

❻ তিনটি ভেক্টর অপেক্ষকের স্কেলার ত্রৈধ গুণফলের অবকলন (Differentiation of scalar triple product of three vector functions) ঃ

$$\frac{d}{dt}[\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})] = \vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{dt}\right) + \vec{A}\cdot\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\times\vec{C}\right) + \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$$

● **প্রমাণ ঃ** ধরা যাক, $\vec{A}(t) = \hat{i}A_1 + \hat{j}A_2 + \hat{k}A_3$, $\vec{B}(t) = \hat{i}B_1 + \hat{j}B_2 + \hat{k}B_3$ এবং $\vec{C}(t) = \hat{i}C_1 + \hat{j}C_2 + \hat{k}C_3$

$$\therefore \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}[\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})] = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{dA_1}{dt} & \frac{dA_2}{dt} & \frac{dA_3}{dt}\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ \frac{dB_1}{dt} & \frac{dB_2}{dt} & \frac{dB_3}{dt}\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ \frac{dC_1}{dt} & \frac{dC_2}{dt} & \frac{dC_3}{dt}\end{vmatrix}$$

$$= \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{A}\cdot\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\times\vec{C}\right) + \vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{dt}\right) \text{ (প্রমাণিত)}$$

7 **তিনটি ভেক্টর অপেক্ষকের ভেক্টর ত্রৈধ গুণফলের অবকলন** (Differentiation of vector triple product of three vector functions) ঃ

$\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ যদি t-এর তিনটি অবকলনযোগ্য ভেক্টর অপেক্ষক হয় তবে,

$$\frac{d}{dt}[\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})] = \frac{d\vec{A}}{dt}\times(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{A}\times\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\times\vec{C}\right) + \vec{A}\times\left(\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{dt}\right)$$

1B.2 ভেক্টরের আংশিক অবকলন (Partial Derivatives of Vectors)

ধরা যাক, একটি ভেক্টর রাশি $\vec{A}$, একাধিক স্কেলার চলরাশি x, y, z (ধরা যাক)-এর উপর নির্ভরশীল, অর্থাৎ $\vec{A}$ হল (x, y, z)-এর অপেক্ষক।

$$\therefore \vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$$

এক্ষেত্রে, যে-কোনো স্কেলার চলরাশি, ধরা যাক, x-এর সাপেক্ষে $\vec{A}$ -এর আংশিক অবকলন বলতে বোঝায় x-এর সাপেক্ষে $\vec{A}$ -এর অবকল সহগ যখন y ও z স্থির থাকে। একে $\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\therefore \frac{\partial\vec{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\vec{A}(x+\Delta x, y, z) - \vec{A}(x, y, z)}{\Delta x}$$

অনুরূপভাবে y ও z-এর সাপেক্ষে $\vec{A}$ -এর আংশিক অবকলন হল যথাক্রমে,

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\vec{A}(x, y+\Delta y, z) - \vec{A}(x, y, z)}{\Delta y} \text{ এবং } \frac{\partial\vec{A}}{\partial z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\vec{A}(x, y, z+\Delta z) - \vec{A}(x, y, z)}{\Delta z}$$

সুতরাং চলরাশিগুলি x, y, z থেকে $x + dx$, $y + dy$ এবং $z + dz$-এ পরিবর্তিত হলে $\vec{A}$ -এর পরিবর্তন হবে,

$$d\vec{A} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\cdot dz$$

গাণিতিক উদাহরণ (Numerical Examples)

1. $\vec{A} = \hat{i}x + \hat{j}y^2 + \hat{k}z^3$। চলরাশিগুলি (x, y, z) থেকে পরিবর্তিত হয়ে $(x + dx, y + dy$ এবং $z + dz)$ হলে $\vec{A}$ ভেক্টরটির পরিবর্তন কত হবে?

» $\vec{A} = \hat{i}x + \hat{j}y^2 + \hat{k}z^3$

$\therefore \frac{\partial\vec{A}}{\partial x} = \hat{i}$, $\frac{\partial\vec{A}}{\partial y} = 2\hat{j}y$ এবং $\frac{\partial\vec{A}}{\partial z} = 3\hat{k}z^2$

$\therefore \vec{A}$ ভেক্টরের পরিবর্তন হবে,

$$d\vec{A} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{A}}{\partial z}dz = \hat{i}\,dx + 2\hat{j}\,ydy + 3\hat{k}z^2dz$$

1B.3 স্কেলার ও ভেক্টর ক্ষেত্র (Scalar and Vector Fields)

যদি কোনো প্রাকৃতিক রাশি দেশ (space)-এর বিন্দু থেকে বিন্দুতে পরিবর্তিত হয়, ওই রাশিটিকে ওই অঞ্চলে অবস্থানের অপেক্ষক হিসেবে প্রকাশ করা যায় এবং ওই অঞ্চলটিকে আলোচ্য রাশিটির ক্ষেত্র (field of the physical quantity) বলা হয়। ক্ষেত্র দুই ধরনের হয়—① **স্কেলার ক্ষেত্র** এবং ② **ভেক্টর ক্ষেত্র**।

① **স্কেলার ক্ষেত্র (Scalar fields) ঃ** ধরা যাক একটি স্কেলার রাশি ϕ-এর মান একটি অঞ্চলে x, y, z-এর সঙ্গে অর্থাৎ বিন্দু থেকে বিন্দুতে নিরবচ্ছিন্নভাবে পরিবর্তিত হয়, তাহলে $\phi = \phi(x, y, z)$-কে ওই রাশির ক্ষেত্র অর্থাৎ স্কেলার ক্ষেত্র বলা হয়।

স্কেলার ক্ষেত্রের অত্যন্ত পরিচিত উদাহরণ হল—কোনো অঞ্চলে চাপের বণ্টন (distribution of pressure), উষ্ণতার বণ্টন (distribution of temperature) এবং তড়িৎ বিভব ইত্যাদি।

② **ভেক্টর ক্ষেত্র (Vector fields) ঃ** ধরা যাক, একটি অঞ্চলে একটি ভেক্টর অপেক্ষক $\vec{A}$, (x, y, z) স্থানাঙ্কের সঙ্গে নিরবচ্ছিন্নভাবে পরিবর্তিত হয়। তাহলে $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$ সংশ্লিষ্ট রাশিটির ভেক্টর ক্ষেত্রকে নির্দেশ করে। উদাহরণ—তড়িৎক্ষেত্র, চৌম্বক ক্ষেত্র, মহাকর্ষ ক্ষেত্র ইত্যাদি।

1B.4 স্কেলার অপেক্ষকের গ্রেডিয়েন্ট (Gradient of a Scalar Function)

ধরা যাক, $\phi = \phi(x, y, z)$ হল একটি স্কেলার অপেক্ষক বা স্কেলার ক্ষেত্র যা একটি নির্দিষ্ট অঞ্চলের প্রতিটি বিন্দু (x, y, z)-তে সুসংজ্ঞায়িত এবং অবকলনযোগ্য। তাহলে অপেক্ষকটির গ্রেডিয়েন্ট-এর সংজ্ঞা হল,

$$\vec{\nabla}\phi = \text{Grad}\,\phi = \hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi$$

যেখানে, $\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$ হল 'ভেক্টর অবকলন অপারেটর' (Vector differential operator), একে বলা হয় 'del' বা 'nabla'। এই অপারেটরটির ধর্ম সাধারণ ভেক্টর রাশির অনুরূপ এবং অপারেটরটি যখন কোনো স্কেলার ক্ষেত্রের ওপর কার্যকর হয় তখন একটি ভেক্টর ক্ষেত্র সৃষ্টি করে।

- **স্কেলার অপেক্ষকের গ্রেডিয়েন্টের তাৎপর্য (Significance of gradient of a scalar function) ঃ** কোনো স্কেলার অপেক্ষক ϕ-এর গ্রেডিয়েন্ট বা $\vec{\nabla}\phi$ হল একটি ভেক্টর রাশি। এর অভিমুখ ϕ-এর সর্বাধিক পরিবর্তনের অভিমুখ নির্দেশ করে এবং এর মান ওই অভিমুখে অবস্থানের সঙ্গে রাশিটির মানের পরিবর্তনের হারকে নির্দেশ করে।
- **দিকসূচক অবকলন (Directional derivative) ঃ** $\hat{n}$ ভেক্টর অভিমুখে কোনো বিন্দু (x_1, y_1, z_1)-তে কোনো স্কেলার অপেক্ষক $\phi = \phi(x, y, z)$-এর দিকসূচক অবকলন $= \left\{\left(\vec{\nabla}\phi\right)_{(x_1, y_1, z_1)}\right\}\cdot\hat{n}$

1B.5 ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স (Divergence of a Vector Field)

ধরাযাক, $\vec{A}(x, y, z) = \hat{i}A_1(x, y, z) + \hat{j}A_2(x, y, z) + \hat{k}A_3(x, y, z)$ হল সুসংজ্ঞায়িত এবং অবকলনযোগ্য ভেক্টর অপেক্ষক বা ভেক্টর ক্ষেত্র। অপেক্ষকটির ডাইভারজেন্স-এর সংজ্ঞা হল নিম্নরূপ ঃ

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \text{Div.}\vec{A} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\hat{i}A_1 + \hat{j}A_2 + \hat{k}A_3)$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

সুতরাং, $(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$ হল একটি **স্কেলার অপেক্ষক**।

এখানে মনে রাখা আবশ্যক যে, $(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$ এবং $(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})$ কিন্তু একই নয়। $(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$ একটি স্কেলার অপেক্ষক হলেও $(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})$ হল একটি অপারেটর।

■ **কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্সের তাৎপর্য (Significance of divergence of a vector field) :** কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স আসলে প্রতি একক আয়তনে ক্ষেত্র ভেক্টরটির বহির্মুখী ফ্লাক্সকে বোঝায়। তাই

① যদি $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$ ধনাত্মক হয় তাহলে $\vec{A}$ একটি উৎস ক্ষেত্র (Source field)-কে নির্দেশ করে।

② যদি $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$ ঋণাত্মক হয় তাহলে $\vec{A}$ একটি Sink field-কে নির্দেশ করে।

③ যদি $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ হয় তাহলে $\vec{A}$ একটি সলিনয়ডাল (Solenoidal) ক্ষেত্রকে নির্দেশ করে।

1B.6 ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল (Curl of a Vector Field)

ধরা যাক, কোনো অঞ্চলে $\vec{A}(x, y, z) = \hat{i} A_1(x, y, z) + \hat{j} A_2(x, y, z) + \hat{k} A_3(x, y, z)$ হল একটি সুসংজ্ঞায়িত এবং অবকলনযোগ্য ভেক্টর অপেক্ষক। $\vec{A}(x, y, z)$ ভেক্টরটির কার্লের সংজ্ঞা হল,

$$\text{Curl}\,\vec{A} = \text{Rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\hat{i} A_1 + \hat{j} A_2 + \hat{k} A_3)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

■ **ভেক্টর অপেক্ষকের কার্ল-এর তাৎপর্য (Significance of curl of a vector field) :**

কোনো বিন্দুতে কোনো ভেক্টরের Curl বা Rot ওই বিন্দুতে ভেক্টরটির ঘূর্ণনের পরিমাণকে সূচিত করে। কোনো ভেক্টর $\vec{A}$-এর কার্ল শূন্য হলে অর্থাৎ $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ হলে ভেক্টরটিকে অঘূর্ণ (irrotational) ভেক্টর বলা হয়।

1B.7 কিছু গুরুত্বপূর্ণ সম্পর্ক এবং ফলাফল (Some Important Relations and Results)

আমরা দেখেছি যে, স্কেলার অপেক্ষক ϕ-এর Gradient এবং ভেক্টর অপেক্ষক $\vec{A}$-এর কার্ল (Curl) উভয়ই ভেক্টর। তাই $\vec{\nabla}\phi$ এবং $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ উভয়েরই ডাইভারজেন্স এবং Curl নির্ণয় করা যায়। এগুলিই এই অনুচ্ছেদে আলোচিত হবে এবং প্রাপ্ত ফলাফলের তাৎপর্যও আলোচিত হবে।

① $\text{Div. Grad.}\,\phi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\phi) = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\hat{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$

$$= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi$$

$$= \nabla^2 \phi$$

যেখানে, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ হল Laplacian operator বা শুধু Laplacian। এটি হল একটি স্কেলার অপারেটর।

$\therefore \nabla^2 = \text{Div. Grad.}$

② $\text{Grad. Div.}\,\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$= \hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)+\hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)+\hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\cdot\partial y}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial x\cdot\partial z}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\cdot\partial y}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial x\cdot\partial z}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\cdot\partial z}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y\cdot\partial z}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2}\right)$$

③ Div. Curl. $\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}$$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left\{\hat{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)-\hat{j}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial z}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x\cdot\partial y}-\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\cdot\partial z}-\frac{\partial^2 A_3}{\partial y\cdot\partial x}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial y\cdot\partial z}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial z\cdot\partial x}-\frac{\partial^2 A_1}{\partial z\cdot\partial y}$$

$$= 0$$

সুতরাং, যে-কোনো ভেক্টর অপেক্ষক $\vec{A}$ -এর ক্ষেত্রে,

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \text{Div. Curl.}\,\vec{A} = 0$$

④ Curl.Grad. $\phi = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi)$

$$= \vec{\nabla}\times\left(\hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$= \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\right\}-\hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right\}+\hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right\}$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\cdot\partial z}-\frac{\partial^2\phi}{\partial z\cdot\partial y}\right)-\hat{j}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\cdot\partial z}-\frac{\partial^2\phi}{\partial z\cdot\partial x}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\cdot\partial y}-\frac{\partial^2\phi}{\partial y\cdot\partial x}\right)$$

$$= 0$$

$\therefore$ Curl. Grad.$\phi = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = 0$

⑤ Curl. Curl. $\vec{A} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$

$$[\because \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})]$$

$$= \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

$\therefore$ Curl. Curl. $\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$

$\therefore$ Curl . Curl. = Grad. Div. $-\ \nabla^2$

গাণিতিক উদাহরণ (Numerical Examples)

1. $\phi(x, y, z) = xy^2z^3$, (4, –1, 1) বিন্দুতে $\vec{\nabla}\phi$ নির্ণয় করো।

$\phi(x, y, z) = xy^2z^3$;

$\therefore \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = y^2z^3,\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 2xyz^3$ এবং $\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = 3xy^2z^2$

$\therefore \vec{\nabla}\phi = \hat{i}\dfrac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j}\dfrac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k}\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = \hat{i}\,y^2z^3 + \hat{j}\,2xyz^3 + \hat{k}\,3xy^2z^2$

সুতরাং $(\vec{\nabla}\phi)_{(4,-1,1)} = \hat{i} - 8\hat{j} + 12\hat{k}$

2. $\phi(x, y, z) = x^2y^2z^2$। (1, –1, 2) বিন্দুতে $(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ ভেক্টর অভিমুখে ϕ-এর দিক্‌সূচক অবকলন নির্ণয় করো।

$\phi(x, y, z) = x^2y^2z^2$

$\therefore \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy^2z^2;\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 2x^2yz^2$ এবং $\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = 2x^2y^2z$

$\therefore \vec{\nabla}\phi = \hat{i}(2xy^2z^2) + \hat{j}(2x^2yz^2) + \hat{k}(2x^2y^2z)$

$\therefore (\vec{\nabla}\phi)_{(1,-1,2)} = (8\hat{i} - 8\hat{j} + 4\hat{k})$

এখন $(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ ভেক্টর অভিমুখ নির্দেশক একক ভেক্টর হল $\hat{n} = \dfrac{\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3}$

$\therefore$ (1, – 1, 2) বিন্দুতে $(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ ভেক্টর অভিমুখে $\phi(x, y, z)$-এর দিক্‌সূচক অবকলন (directional derivative)

$$= \{(\vec{\nabla}\phi)_{(1,-1,2)}\} \cdot \hat{n}$$

$$= (8\hat{i} - 8\hat{j} + 4\hat{k}) \cdot \frac{(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})}{3}$$

$$= \frac{8+16+8}{3} = \frac{32}{3}$$

3. $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ হলে $\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = ?$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = \left(\hat{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\dfrac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)$

$\dfrac{\partial}{\partial x}(x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3.$

4. $\vec{r}$ যদি অবস্থান ভেক্টর হয় তবে $\vec{\nabla}\times\vec{r}$ কত হবে?

$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

$$\therefore \vec{\nabla}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(y)\right\} + \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(x) - \frac{\partial}{\partial x}(z)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x)\right\}$$

$$= \hat{i}(0 - 0) + \hat{j}(0 - 0) + \hat{k}(0 - 0) = \vec{0}$$

5. দেখাও যে, $\vec{\nabla}\phi$ হল $\phi(x, y, z) =$ ধ্রুবক এই তলের অভিলম্ব একটি ভেক্টর।

ধরা যাক, $\phi(x, y, z) =$ ধ্রুবক তলের উপর অবস্থিত কোনো বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (x, y, z)।

$\therefore$ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

$\therefore d\vec{r} = \hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy + \hat{k}dz$ এবং $d\vec{r}$ P বিন্দুতে তলটির স্পর্শক তলে অবস্থিত।

এখন, $d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\cdot(\hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy + \hat{k}dz)$$

$= (\vec{\nabla}\phi)\cdot d\vec{r}$ $\quad\because \phi(x, y, z) =$ ধ্রুবক, $d\phi = 0$

$\therefore (\vec{\nabla}\phi)\cdot d\vec{r} = 0$

$\therefore \vec{\nabla}\phi$ হল $d\vec{r}$ -এর উপর লম্ব।

আবার যেহেতু $d\vec{r}$, $\phi(x, y, z) =$ ধ্রুবক তলের স্পর্শক তলে অবস্থিত তাই প্রমাণিত হল যে, $\vec{\nabla}\phi$ ভেক্টরটি $\phi(x, y, z) =$ ধ্রুবক তলের অভিলম্ব একটি ভেক্টর।

6. $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$ নির্ণয় করো যেখানে $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ **[CU 2014]**

$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \therefore r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \frac{1}{r} = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\therefore \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)$$

এখন, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}$

$$= -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{r^2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x$$

$$= -\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{r^3}$$

অনুরূপভাবে, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{y}{r^3}$ এবং $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{z}{r^3}$

$$\therefore \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \hat{i}\left(-\frac{x}{r^3}\right) + \hat{j}\left(-\frac{y}{r^3}\right) + \hat{k}\left(-\frac{z}{r^3}\right)$$

$$= -\frac{\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z}{r^3} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

7. যদি $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ হয় তবে দেখাও যে, $\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\times\vec{v})$; যেখানে $\vec{\omega}$ হল একটি ধ্রুবক ভেক্টর এবং $\vec{r}$ হল অবস্থান ভেক্টর।

ধরা যাক, কার্তেসীয় নির্দেশতন্ত্রের অক্ষগুলি বরাবর $\vec{\omega}$-এর উপাংশগুলি হল যথাক্রমে ω_1, ω_2 ও ω_3 হলে,

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(\omega_2 z - \omega_3 y) + \hat{j}(\omega_3 x - \omega_1 z) + \hat{k}(\omega_1 y - \omega_2 x)$$

$$\therefore \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (\omega_2 z - \omega_3 y) & (\omega_3 x - \omega_1 z) & (\omega_1 y - \omega_2 x) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}[\hat{i}\{\frac{\partial}{\partial y}(\omega_1 y - \omega_2 x) - \frac{\partial}{\partial z}(\omega_3 x - \omega_1 z)\} + \hat{j}\{\frac{\partial}{\partial z}(\omega_2 z - \omega_3 y) - \frac{\partial}{\partial x}(\omega_1 y - \omega_2 x)\}$$
$$+ \hat{k}\{\frac{\partial}{\partial x}(\omega_3 x - \omega_1 z) - \frac{\partial}{\partial y}(\omega_2 z - \omega_3 y)\}]$$

$$= \frac{1}{2}[\hat{i}(\omega_1 + \omega_1) + \hat{j}(\omega_2 + \omega_2) + \hat{k}(\omega_3 + \omega_3)]$$

$$= \hat{i}\omega_1 + \hat{j}\omega_2 + \hat{k}\omega_3 = \vec{\omega}$$ (প্রমাণিত)

৪. $\vec{A}(t)$ ভেক্টর অপেক্ষকটির মান ধ্রুবক হলে প্রমাণ করো যে, $\frac{d\vec{A}}{dt}$ ভেক্টরটি $\vec{A}$-এর উপর লম্ব হবে। [CU 2016]

▶ $\because \vec{A}(t)$-এর মান ধ্রুবক কাজেই $\vec{A}(t) \cdot \vec{A}(t) = A^2 =$ ধ্রুবক।

$$\therefore \frac{d}{dt}\{\vec{A}(t) \cdot \vec{A}(t)\} = \frac{d}{dt}(A^2) = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 2\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{A} = 0$$

$$\therefore \frac{d\vec{A}(t)}{dt}\cdot\vec{A}(t) = 0$$

সুতরাং, $\frac{d\vec{A}}{dt}$ ভেক্টরটি $\vec{A}$-এর উপর লম্ব (প্রমাণিত)।

9. $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 6$ তলের উপর (2, 0, 1) বিন্দুতে তলটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় করো।

▶ আমরা জানি, $\vec{\nabla}\phi$ হল $\phi(x, y, z) =$ ধ্রুবক তলের অভিলম্ব।

এক্ষেত্রে প্রদত্ত তলের সমীকরণ হল $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 6 =$ ধ্রুবক।

$$\therefore \phi(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2$$

$$\therefore \vec{\nabla}\phi = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2 + 3y^2 + 2z^2)$$

$$= \hat{i}(2x) + \hat{j}(6y) + \hat{k}(4z)$$

$$\therefore (\vec{\nabla}\phi)_{(2,0,1)} = 4\hat{i} + 4\hat{k}$$

$\therefore$ (2, 0, 1) বিন্দুতে প্রদত্ত তলের অভিলম্ব একক ভেক্টর হল, $\hat{n} = \frac{(\vec{\nabla}\phi)_{(2,0,1)}}{|(\vec{\nabla}\phi)_{(2,0,1)}|}$

$$= \frac{4\hat{i}+4\hat{k}}{\sqrt{16+16}} = \frac{4\hat{i}+4\hat{k}}{4\sqrt{2}} = \frac{\hat{i}+\hat{k}}{\sqrt{2}}$$

10. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি irrotational vector হলে দেখাও যে, $(\vec{A} \times \vec{B})$ একটি সলিনয়েডাল ভেক্টর।

▶ যেহেতু $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ irrotational vectors, $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0}$ এবং $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0}$.

এখন $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla} \times \vec{B})$

$$= 0 - 0 = 0$$

$\because \vec{\nabla}\cdot(\vec{A} \times \vec{B}) = 0$ সুতরাং, $(\vec{A} \times \vec{B})$ হল সলিনয়েডাল ভেক্টর।

11. যদি $\vec{A}(x, y, z)$ একটি ভেক্টর অপেক্ষক এবং $\phi(x, y, z)$ একটি স্কেলার অপেক্ষক হয় তবে দেখাও যে, $\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A}) = \phi\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi$

$$\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A}) = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\hat{i}\phi A_1 + \hat{j}\phi A_2 + \hat{k}A_3)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_3)$$

$$= \phi\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right) + \left(A_1\frac{\partial\phi}{\partial x}+A_2\frac{\partial\phi}{\partial y}+A_3\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$= \phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + (\hat{i}A_1 + \hat{j}A_2 + \hat{k}A_3)\cdot\left(\hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$= \phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi \text{ (প্রমাণিত)}$$

12. $\vec{\nabla}\cdot(r^n\vec{r})$ নির্ণয় করো এবং n-এর মান নির্ণয় করো যার জন্য $(r^n\vec{r})$ ভেক্টরটি সলিনয়েডাল ভেক্টর হবে।

$$r^n\vec{r} = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}}(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot(r^n\vec{r}) = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}}(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$$

$$= \left\{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}} + x\cdot\frac{n}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n-2}{2}}\cdot 2x\right\} + \left\{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}} + y\cdot\frac{n}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n-2}{2}}\cdot 2y\right\}$$
$$+ \left\{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}} + z\cdot\frac{n}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n-2}{2}}\cdot 2z\right\}$$

$$= 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}} + n(x^2+y^2+z^2)\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

$$= 3r^n + nr^n = (n+3)r^n$$

$(r^n\vec{r})$ ভেক্টরটি সলিনয়েডাল হবে যদি $\vec{\nabla}\cdot(r^n\vec{r}) = 0$ হয়,

অর্থাৎ $n + 3 = 0$ হয় অর্থাৎ $n = -3$ হয়।

$\therefore n = -3$ হলে প্রদত্ত ভেক্টরটি সলিনয়েডাল হবে।

13. $\vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right)$ নির্ণয় করো যেখানে $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

$$\vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

এখন, $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x\right\}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot x\right\}$$

$$= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x\cdot x$$

$$= \frac{3x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

একইভাবে, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

এবং $\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\therefore \vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

1B.8 ভেক্টরের সমাকলন (Integration of Vector Function)

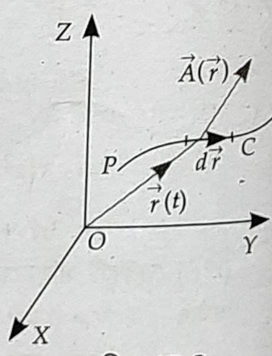
সাধারণভাবে ভেক্টর অপেক্ষকের সমাকলন, স্কেলার অপেক্ষকের সমাকলনের অনুরূপ। ধরা যাক, $\vec{A}(t) = \hat{i}A_1(t) + \hat{j}A_2(t) + \hat{k}A_3(t)$ হল একটি স্কেলার অপেক্ষক 't'-এর একটি ভেক্টর অপেক্ষক যেখানে $A_1(t)$, $A_2(t)$ এবং $A_3(t)$ হল যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষ বরাবর $\vec{A}$ ভেক্টরের স্কেলার উপাংশত্রয়। তাহলে $\vec{A}(t)$-এর ভেক্টর সমাকলন হল,

$$\int \vec{A}(t)\cdot dt = \int[\hat{i}A_1(t) + \hat{j}A_2(t) + \hat{k}A_3(t)]\cdot dt$$
$$= \hat{i}\int A_1(t)dt + \hat{j}\int A_2(t)dt + \hat{k}\int A_3(t)\cdot dt$$

এটি হল ভেক্টর অপেক্ষকের অনির্দিষ্ট সমাকলন (indefinite integration)।

- **রৈখিক সমাকল (Line Integral) :** কোনো ভেক্টর অপেক্ষকের রৈখিক সমাকল হল একটি রেখা বরাবর ভেক্টরটির সমাকল। রৈখিক সমাকলনকে স্পর্শকীয় রৈখিক সমাকলও বলা যায়। একটি বক্ররেখা 'C' বরাবর P থেকে Q-এর মধ্যে একটি ভেক্টর অপেক্ষক $\vec{A}(\vec{r})$-এর রৈখিক সমাকল হল [চিত্র 1B.2]

$$\int_P^Q \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$



চিত্র-1B.2

যেখানে $d\vec{r}$ হল $\vec{r}$ অবস্থানে অর্থাৎ (x, y, z) বিন্দুতে বক্ররেখার স্পর্শক বরাবর ক্ষুদ্র সরণ (elemental displacement)।

এখন যদি $\vec{A}(\vec{r}) = \hat{i}A_1(\vec{r}) + \hat{j}A_2(\vec{r}) + \hat{k}A_2(\vec{r})$ হয় তবে,

$$\int_P^Q \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_P^Q A_1dx + \int_P^Q A_2dy + \int_P^Q A_3dz$$

সুতরাং, কোনো ভেক্টর অপেক্ষকের রৈখিক সমাকল হল একটি স্কেলার রাশি।

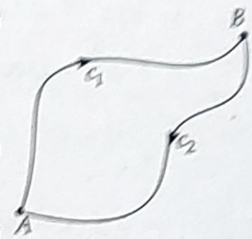
উদাহরণ হিসেবে বলা যায় যে, যদি $\vec{F}(\vec{r})$ একটি বলের ক্রিয়ায় একটি বস্তু A থেকে B বিন্দুতে যায় তবে বল কর্তৃক কৃতকার্য হয়,

$$W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_A^B[\hat{i}F_1 + \hat{j}F_2 + \hat{k}F_3)\cdot(\hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy + \hat{k}dz)]$$
$$= \int_A^B (F_1\cdot dx + F_2\cdot dy + F_3\cdot dz)$$

যেখানে $\vec{F}(\vec{r}) = \hat{i}F_1(\vec{r}) + \hat{j}F_2(\vec{r}) + \hat{k}F_3(\vec{r})$, অর্থাৎ F_1, F_2 এবং F_3 হল X, Y ও Z অক্ষ বরাবর $\vec{F}$-এর উপাংশত্রয়।

বিশেষ ক্ষেত্র (Special case) :

এই বিষয়ে মনে রাখা প্রয়োজন যে, কোনো বদ্ধ পথ বরাবর [চিত্র 1B.3] কোনো ভেক্টর অপেক্ষক $\vec{A}(\vec{r})$-এর পথ সমাকলন হল $\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{AC_1B} \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r} + \int_{BC_2A} \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$



চিত্র-1B.3

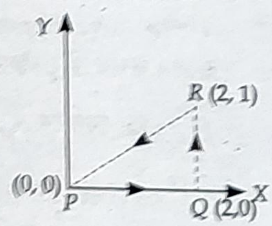
যদি $\oint \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0$ হয় তবে $\vec{A}(\vec{r})$ ভেক্টর ক্ষেত্রটিকে 'অঘূর্ণ ক্ষেত্র' (irrotational field) বলা হয়।

$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r})$ হলে অর্থাৎ আলোচ্য ভেক্টর অপেক্ষকটি বল-ক্ষেত্র হলে $\oint \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0$, ইহা একটি বদ্ধপথে বস্তুটিকে ঘুরিয়ে আনতে কৃতকার্যকে নির্দেশ করে। তাই $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ হলে বলক্ষেত্রটিকে সংরক্ষী বলক্ষেত্র (Conservative force field) বলা হয়।

গাণিতিক উদাহরণ (Numerical Examples)

1. একটি ভেক্টর অপেক্ষক, $\vec{A} = \hat{i}(xy + y^2) + \hat{j}(2y - 3xy)$ ΔPQR বরাবর $\oint \vec{A}\cdot d\vec{r}$ নির্ণয় করো যেখানে, P, Q এবং R বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক হল যথাক্রমে (0, 0), (2, 0) এবং (2, 1)।

$\vec{A} = \hat{i}(xy + y^2) + \hat{j}(2y - 3xy)$ হল $x - y$ তলে অবস্থিত, তাই $d\vec{r} = \hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy$



$$\therefore \vec{A}\cdot d\vec{r} = \{\hat{i}(xy + y^2) + \hat{j}(2y - 3xy)\}\cdot(\hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy)$$
$$= (xy + y^2)dx + (2y - 3xy)dy$$

এখন $\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_P^Q \vec{A}\cdot d\vec{r} + \int_Q^R \vec{A}\cdot d\vec{r} + \int_R^P \vec{A}\cdot d\vec{r}$

$P \to Q$-এর ক্ষেত্রে $y = 0$ $\therefore dy = 0$ এবং x-এর মান শূন্য থেকে 2 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়।

$$\therefore \int_P^Q \vec{A}\cdot d\vec{r} = 0$$

$Q \to R$-এর ক্ষেত্রে $x = 2$, $\therefore dx = 0$ এবং $y = 0$ থেকে $y = 1$ হয়।

$$\therefore \int_Q^R \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 (2y - 6y)dy = -4\int_0^1 y\,dy = -4\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1$$
$$= -4 \times \frac{1}{2} = -2$$

$R \to P$-এর ক্ষেত্রে সরলরেখাটির সমীকরণ, $y = \frac{1}{2}\cdot x \Rightarrow x = 2y$

$$\therefore dy = \frac{1}{2}\cdot dx \Rightarrow dx = 2dy$$

$$\therefore \int_R^P \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_1^0 \{(2y^2 + y^2)\cdot 2dy + (2y - 3 \times 2y \times y)dy\}$$
$$= \int_1^0 (6y^2 + 2y - 6y^2)dy = \int_1^0 2y\,dy = 2 \times \frac{1}{2}\left[y^2\right]_1^0$$
$$= 0 - 1 = -1$$

$$\therefore \oint \vec{A}\cdot d\vec{r} = 0 - 2 - 1 = -3$$

2. একটি বল $\vec{F} = 3xy\hat{i} - y^2\hat{j}$-এর প্রভাবে একটি কণা $x - y$ তলে $y = 2x^2$ পথে (0, 0) বিন্দু থেকে (1, 2) বিন্দুতে গেলে কৃতকার্য হিসেব করো।

উঃ প্রযুক্ত বল $\vec{F} = 3xy\hat{i} - y^2\hat{j}$

এবং সরণ $d\vec{r} = \hat{i}dx + \hat{j}dy$

$$\therefore \vec{F}\cdot d\vec{r} = (3xy\hat{i} - y^2\hat{j})\cdot(\hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy) = 3xydx - y^2dy$$
$$= 3x\cdot 2x^2dx - (2x^2)^2\cdot 4x\;dx\;[\because y = 2x^2]$$
$$= 6x^3dx - 16x^5dx$$
$$= (6x^3 - 16x^5)dx$$

$\therefore$ কৃতকার্য, $W = \int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 (6x^3 - 16x^5)dx$

$$= \left[\frac{6}{4}x^4 - \frac{16}{6}x^6\right]_0^1 = \left[\frac{3}{2}x^4 - \frac{8}{3}x^6\right]_0^1 = \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3}\right) \text{ একক}$$

$$= \frac{9-16}{6} \text{ একক} = -\frac{7}{6} \text{ একক।}$$

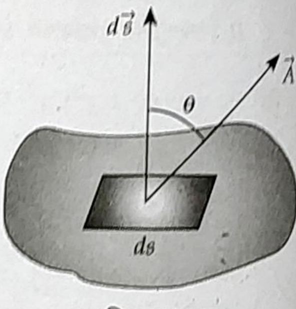
■ **পৃষ্ঠ সমাকল (Surface Integral) ঃ**

ধরা যাক, যে-কোনো আকারের একটি তলের ক্ষেত্রফল S এবং তলের একটি ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফল উপাদান (area element)-এর সঙ্গে একটি ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{A}$, θ কোণে আনত। তাহলে S তলের উপর $\vec{A}$ ভেক্টরের পৃষ্ঠ সমাকলের সংজ্ঞা হল,

$\iint\limits_S A_n dS$; যেখানে A_n হল $\vec{A}$ ভেক্টরের উপাংশ যা $d\vec{S}$ -এর অভিমুখে

$$= \iint\limits_S (A\cos\theta)dS = \iint\limits_S \vec{A}\cdot d\vec{S}\;[\because A_n = A\cos\theta]$$

যেখানে $\iint\limits_S$ সমগ্র তলের ওপর পৃষ্ঠ সমাকল নির্দেশ করে।



চিত্র-1B.4

■ **কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের পৃষ্ঠ সমাকলের তাৎপর্য ঃ** কোনো তল S-এর উপর কোনো ক্ষেত্রীয় ভেক্টর (field vector) $\vec{A}$ -এর ক্ষেত্রীয় সমাকল বা পৃষ্ঠ সমাকল ওই তলের মধ্য দিয়ে ওই ভেক্টরটির মোট ফ্লাক্স (flux) বা প্রবাহ নির্দেশ করে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় যে, যদি আলোচ্য ভেক্টরটি তড়িৎক্ষেত্র ভেক্টর হয় তবে

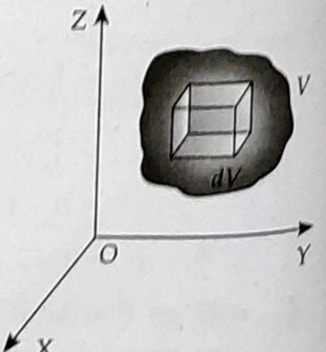
$\iint\limits_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$, S তলের মধ্য দিয়ে মোট তড়িৎ ফ্লাক্স বোঝায়।

একইভাবে কোনো স্কেলার ক্ষেত্র (scalar field) ϕ-এর ক্ষেত্রীয় সমাকল হল $\iint\limits_S \phi\cdot d\vec{S}$ । এ প্রসঙ্গে বলা বাহুল্য যে, কোনো ক্ষেত্রীয় ভেক্টরের ক্ষেত্র সমাকল স্কেলার এবং কোনো স্কেলার ক্ষেত্রের পৃষ্ঠ সমাকল হল ভেক্টর।

■ **আয়তন সমাকল (Volume Integral) ঃ**

ধরা যাক $\vec{A} = \hat{i}A_1 + \hat{j}A_2 + \hat{k}A_3$ হল V আয়তনের অঞ্চলের মধ্যে একটি একমান বিশিষ্ট এবং নিরবচ্ছিন্ন ভেক্টর অপেক্ষক। তাহলে V আয়তন ব্যাপি [চিত্র 1B.5] $\vec{A}$ ভেক্টরটির আয়তন সমাকল হল, $\iiint\limits_V \vec{A}\,dV$

$$= \hat{i}\iiint\limits_V A_1 dV + \hat{j}\iiint\limits_V A_2 dV + \hat{k}\iiint\limits_V A_3 dV$$

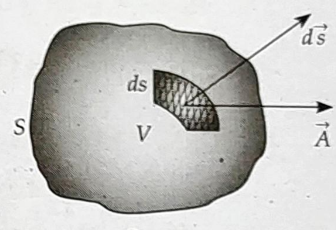


চিত্র-1B.5

1B.9 গসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য (Gauss's Divergence theorem) এবং স্টোক্সের কার্ল উপপাদ্য (Stokes' Curl Theorem)

(a) **গসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য (Gauss' divergence theorem) ঃ** পৃষ্ঠ বা ক্ষেত্র সমাকলকে আয়তন সমাকলে এবং আয়তন সমাকলকে পৃষ্ঠ সমাকলে পরিবর্তন করার ক্ষেত্রে এই উপপাদ্যটি অত্যন্ত তাৎপর্যপূর্ণ। এই উপপাদ্যটির বিবৃতি হল নিম্নরূপ ঃ

কোনো বন্ধ তলের সমগ্র পৃষ্ঠের উপর কোনো একমানবিশিষ্ট, নিরবচ্ছিন্ন ক্ষেত্রীয় ভেক্টরের লম্ব উপাংশের ক্ষেত্রীয় সমাকল ওই তল দ্বারা আবদ্ধ মোট আয়তনের ওপর ভেক্টরটির ডাইভারজেন্সের আয়তন সমাকলের সমান হবে।



চিত্র-1B.6

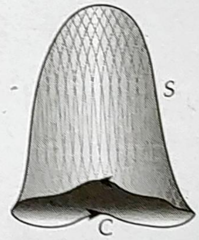
» **ব্যাখ্যাসহ গাণিতিক রূপ ঃ** ধরা যাক, $\vec{A} = \hat{i}A_1 + \hat{j}A_2 + \hat{k}A_3$ হল V আয়তনের মধ্যে (যা S তল দ্বারা সীমাবদ্ধ [চিত্র 1B.6]) একটি একমানবিশিষ্ট এবং নিরবচ্ছিন্ন ভেক্টর ক্ষেত্র। তাহলে গসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্যটিকে গাণিতিকভাবে লেখা যায়,

$$\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})dV$$

$$\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)dV$$

(b) **স্টোক্স-এর কার্ল উপপাদ্য (Stokes' curl theorem) ঃ** এই উপপাদ্যটি পৃষ্ঠ সমাকলকে রৈখিক সমাকলে এবং রৈখিক সমাকলকে পৃষ্ঠ সমাকলে পরিবর্তন করার ক্ষেত্রে খুব গুরুত্বপূর্ণ।

উপপাদ্যটির বিবৃতি হল— *কোনো বন্ধরেখা 'C' বরাবর কোনো সুসংজ্ঞায়িত ভেক্টর ক্ষেত্রের স্পর্শকীয় উপাংশের রৈখিক সমাকল ওই বন্ধরেখা 'C' দ্বারা সীমাবদ্ধ উন্মুক্ত যে-কোনো আকারের তলের উপর ভেক্টরটির কার্ল-এর লম্ব উপাংশের ক্ষেত্রীয় সমাকলের সমান হবে।*



চিত্র-1B.7

» **ব্যাখ্যাসহ গাণিতিক রূপ ঃ** ধরা যাক, $\vec{A}$ হল একটি নিরবচ্ছিন্ন এবং অবকলনযোগ্য ভেক্টর অপেক্ষক। S হল যে-কোনো আকারের একটি তল যা বন্ধ বক্ররেখা 'C' দ্বারা সীমাবদ্ধ।

সুতরাং স্টোক্সের কার্ল উপপাদ্য অনুযায়ী,

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{S}$$

গাণিতিক উদাহরণ (Numerical Examples)

1. দেখাও যে, $\iint_S \vec{r}.d\vec{S} = 3V$, যেখানে V হল S তল দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের আয়তন এবং $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

» গসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য অনুযায়ী,

$$\iint_S \vec{r}\cdot d\vec{S} = \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{r})dV$$

এখন $\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z)$

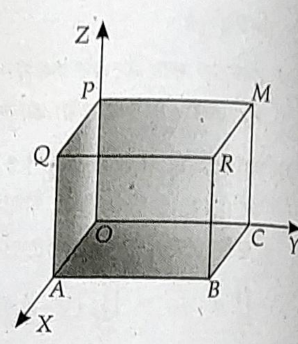
$= 1 + 1 + 1 = 3$

$\therefore \iint_S \vec{r}\cdot d\vec{S} = \iiint_V 3dV = 3\iiint_V dV = 3V$ (প্রমাণিত)

2. $\iint_S \vec{A}.d\vec{S}$ নির্ণয় করো যেখানে $\vec{A} = 6z\hat{i} - 4x\hat{j} + 2y\hat{k}$, S হল $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0$ এবং $z = 1$ তলগুলির দ্বারা আবদ্ধ ঘনকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল।

$$\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iint_{OABC} \vec{A}\cdot d\vec{S} + \iint_{PQRM} \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

$$+ \iint_{PQAO} \vec{A}\cdot d\vec{S} + \iint_{MRBC} \vec{A}\cdot d\vec{S} + \iint_{OCMP} \vec{A}\cdot d\vec{S} + \iint_{ABRQ} \vec{A}\cdot d\vec{S}$$



(i) OABC তলের ক্ষেত্রে $z = 0$, $d\vec{S} = -\hat{k}dxdy$

$$\therefore \vec{A}.d\vec{S} = (-4x\hat{j} + 2y\hat{k}).(-\hat{k}dxdy) = -2y\,dxdy$$

$$\therefore \iint_{OABC} \vec{A}.d\vec{S} = -2\int_0^1 ydy \int_0^1 dx = -2 \times \frac{1}{2} \times 1 = -1$$

(ii) PQRM তলের ক্ষেত্রে $z = 1$, $d\vec{S} = \hat{k}dxdy$

$$\therefore \vec{A}.d\vec{S} = (6\hat{i} - 4x\hat{j} + 2y\hat{k}).(\hat{k}dxdy) = 2ydxdy$$

$$\therefore \iint_{PQRM} \vec{A}.d\vec{S} = 2\int_0^1 ydy \int_0^1 dx = 2 \times \frac{1}{2} \times 1 = 1$$

(iii) PQAO তলের ক্ষেত্রে $y = 0$, $d\vec{S} = -\hat{j}\,dxdz$

$$\therefore \vec{A}.d\vec{S} = (6z\hat{i} - 4x\hat{j}).(-\hat{j}\,dxdz) = 4xdxdz$$

$$\therefore \iint_{PQAO} \vec{A}.d\vec{S} = 4\int_0^1 xdx \int_0^1 dz = 4 \times \frac{1}{2} \times 1 = 2$$

(iv) MRBC তলের ক্ষেত্রে $y = 1$, $d\vec{S} = \hat{j}\,(dxdz)$

$$\therefore \vec{A}.d\vec{S} = (6z\hat{i} - 4x\hat{j} + 2\hat{k}).(\hat{j}\,dxdz)$$

$$= -4xdxdz$$

$$\therefore \iint_{MRBC} \vec{A}.d\vec{S} = -4\int_0^1 x\,dx \int_0^1 dz = -4 \times \frac{1}{2} \times 1 = -2$$

(v) OCMP তলের ক্ষেত্রে $x = 0$, $d\vec{S} = -\hat{i}\,dydz$

$$\therefore \vec{A}.d\vec{S} = (6z\hat{i} + 2y\hat{k}).(-\hat{i}\,dydz)$$

$$= -6zdzdy$$

$$\therefore \iint_{OCMP} \vec{A}.d\vec{S} = -6\int_0^1 zdz \int_0^1 dy = -6 \times \frac{1}{2} \times 1 = -3$$

(vi) ABRQ তলের ক্ষেত্রে $x = 1$, $d\vec{S} = \hat{i}\,dydz$

$$\therefore \vec{A}.d\vec{S} = (6z\hat{i} - 4\hat{j} + 2y\hat{k}).(\hat{i}\,dydz)$$

$$= 6z\,dzdy$$

$$\therefore \iint_{ABRQ} \vec{A}\cdot d\vec{S} = 6\int_0^1 z dz \int_0^1 dy = 6 \times \frac{1}{2} \times 1 = 3$$

$$\therefore \iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = -1 + 1 + 2 - 2 - 3 + 3 = 0$$

3. ডাইভারজেন্স উপপাদ্য প্রয়োগে $\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS$ নির্ণয় করো যেখানে, $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$ এবং S হল একটি ঘনকের তলগুলির ক্ষেত্রফল। যে ঘনকটি $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ এবং $z = 0; z = 1$ তলগুলির দ্বারা সীমাবদ্ধ।

সমাধান: ডাইভারজেন্স উপপাদ্য অনুসারে,

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS = \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})dV$$

এখন, $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(4xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz)$$

$$= 4z - 2y + y = 4z - y$$

ক্ষুদ্র আয়তন উপাদান, $dV = dx\cdot dy\cdot dz$

$$\therefore \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})dV = \iiint_V (4z - y)dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{x=0}^1\int_{y=0}^1 \left[2z^2 - yz\right]_{z=0}^1 dx\,dy = \int_{x=0}^1\int_{y=0}^1 (2 - y)dx\,dy$$

$$= \int_{x=0}^1 \left(2y - \frac{y^2}{2}\right)_{y=0}^{y=1} dx = \int_{x=0}^1 \left(2 - \frac{1}{2}\right)dx = \int_{x=0}^1 \frac{3}{2}dx = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \iiint_V \vec{F}\cdot\hat{n}dS = \frac{3}{2}$$

4. গসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য প্রয়োগ করে $0 \le x, y, z \le 1$ ঘনকের তলগুলির মধ্য দিয়ে $\vec{A} = \hat{i}xy^2 + 2\hat{j}y^3 + \hat{k}y^2z$ ভেক্টরটির মোট ফ্লাক্স নির্ণয় করো।

সমাধান: ঘনকটির তলগুলির মধ্য দিয়ে $\vec{A}$ ভেক্টরটির মোট ফ্লাক্স

$$= \iint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\,d\vec{S} = \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})dV$$ [গসের উপপাদ্য অনুযায়ী]

এখন, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\hat{i}xy^2 + 2\hat{j}y^3 + \hat{k}y^2z)$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(y^2z)$$

$$= y^2 + 6y^2 + y^2 = 8y^2$$

$$\therefore \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})dV = \iiint_V 8y^2\,dx\,dy\,dz = 8\int_0^1 dx\int_0^1 y^2dy\int_0^1 dz$$

$$= 8 \times 1 \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{8}{3}$$

$\therefore$ ঘনকটির তলগুলির মধ্য দিয়ে $\vec{A}$ ভেক্টরটির মোট ফ্লাক্স $= \frac{8}{3}$।