1A
Chapter

ভেক্টর বীজগণিত

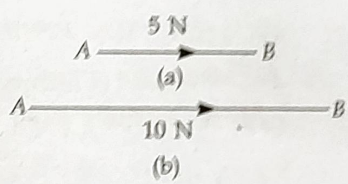
Vector Algebra

At A Glance

Vector Algebra : vectors as directed line segments. Addition of vectors and multiplication by a scalar. Scalar and vector products. Basis and representation of vectors.

1A.1 তিরচিহ্নযুক্ত রেখাংশ হিসাবে ভেক্টর (Vectors as Directed Line Segments)

ভেক্টর রাশির মান ও অভিমুখ দুই-ই আছে। তাই তিরচিহ্ন যুক্ত রেখাংশের সাহায্যে ভেক্টরকে প্রকাশ করা হয়। এক্ষেত্রে তিরচিহ্নের দিক আলোচ্য ভেক্টরটির অভিমুখ নির্দেশ করে এবং ভেক্টরটির মান রেখাংশটির দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক হয়। ধরা যাক, 1 cm দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশ 5 N একটি বলকে নির্দেশ করে তবে 2 cm দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশ 10 N মানের অপর একটি বলকে নির্দেশ করবে [চিত্র 1A.1]।



চিত্র-1A.1

একথা মনে রাখা আবশ্যক যে, মান এবং অভিমুখ-ই একটি রাশির ভেক্টর হওয়ার পক্ষে যথেষ্ট নয়। রাশিটি যদি ভেক্টর বীজগণিতের নিয়মগুলি মেনে চলে তবেই মান ও অভিমুখ বিশিষ্ট ওই রাশিটিকে ভেক্টর রাশি বলা যায়। সুতরাং, একটি প্রাকৃতিক রাশির ভেক্টর হওয়ার শর্ত হল—

(1) রাশিটির অবশ্যই মান ও অভিমুখ থাকতে হবে যা নির্দেশতন্ত্র (স্থানাঙ্ক সংস্থা) নিরপেক্ষ হবে এবং (2) রাশিটিকে অবশ্যই ভেক্টর বীজগণিতের নিয়মগুলি মেনে চলতে হবে। নিয়মগুলি হল—

(a) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$ (বিনিময় নিয়ম বা commutative rule)

(b) $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$ (সংযোগ নিয়ম বা associative rule)

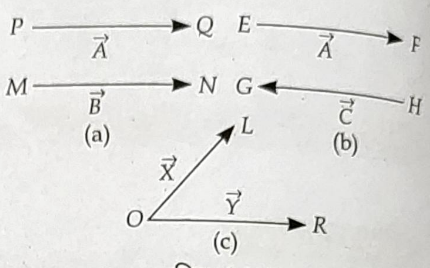
(c) $$\left.\begin{aligned}&\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}\\&k(\vec{A}+\vec{B})=k\vec{A}+k\vec{B}\ (k\ \text{একটি স্কেলার রাশি})\\&\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}\end{aligned}\right\}\ \text{(বন্টন নিয়ম বা distributive rule)}$$

তড়িৎ প্রবাহমাত্রার মান ও অভিমুখ উভয়ই থাকা সত্ত্বেও তড়িৎ প্রবাহমাত্রা স্কেলার রাশি কারণ এটি ভেক্টর বীজগণিতের নিয়ম মেনে চলে না। একই কারণে সময়ও স্কেলার রাশি।

1A.2 ভেক্টর সম্পর্কিত কয়েকটি তথ্য (Some Useful Information about Vectors)

(a) সমান ভেক্টর (Equal vectors) ঃ *দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের মান ও অভিমুখ একই হলে তবেই ভেক্টর দুটিকে সমান ভেক্টর বলা হয়।*

চিত্র 1A.2(a)-তে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মান সমান অর্থাৎ $|\vec{A}| = PQ = |\vec{B}| = MN$ এবং ভেক্টরদ্বয়ের অভিমুখ একই। তাই $\vec{A} = \vec{B}$ অর্থাৎ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ সমান ভেক্টর।



চিত্র-1A.2

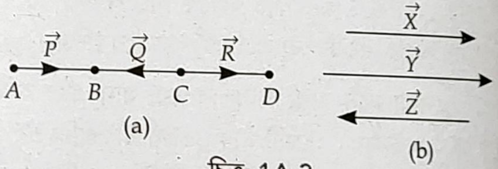
চিত্র 1A.2(b)-তে $\vec{A}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টরদ্বয়ের মান সমান হলেও অভিমুখ বিপরীত তাই এরা সমান ভেক্টর নয়। একইভাবে চিত্র 1A.2(c)-তে $\vec{X}$ ও $\vec{Y}$ ভেক্টরদ্বয়ের মান সমান হলেও অভিমুখ আলাদা হওয়ায় এরা সমান ভেক্টর নয়।

(b) বিপরীত ভেক্টর (Opposite vectors) ঃ *সমমানের দুটি ভেক্টরের অভিমুখ বিপরীত হলে ওই ভেক্টরদুটিকে বিপরীত ভেক্টর বলা হয়।*

চিত্র 1A.2(b)-তে $\vec{A}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টরদ্বয়ের মান সমান অর্থাৎ $|\vec{A}| = |\vec{C}| = EF = GH$ কিন্তু ওদের অভিমুখ বিপরীত। তাই এরা বিপরীত ভেক্টর। এক্ষেত্রে $\vec{A} = \overrightarrow{EF}$ এবং $\overrightarrow{HG} = -\overrightarrow{EF}$ $\quad \therefore \vec{C} = -\vec{A}$

(c) একরেখীয় ভেক্টর (Collinear vectors) ঃ *একই রেখায় অবস্থিত অথবা সমান্তরালে অবস্থিত সমমুখী বা বিপরীতমুখী ভেক্টরকে একরেখীয় ভেক্টর বলা হয়।*

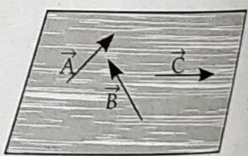
চিত্র 1A.3(a)-তে $\overrightarrow{AB} = \vec{P}, \overrightarrow{CB} = \vec{Q}$ এবং $\overrightarrow{CD} = \vec{R}$ ভেক্টর তিনটি একই রেখায় অবস্থিত কিন্তু 1A.3(b)-তে, $\vec{X}$, $\vec{Y}$ ও $\vec{Z}$ ভেক্টর তিনটি সমান্তরালভাবে অবস্থিত। সুতরাং, $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ও $\vec{R}$ এরাও একরেখীয় ভেক্টর এবং $\vec{X}$, $\vec{Y}$ ও $\vec{Z}$-ও একরেখীয় ভেক্টর।



চিত্র-1A.3

এ প্রসঙ্গে মনে রাখা প্রয়োজন যে দুটি একরেখীয় ভেক্টরের অভিমুখ সমান হলে তাদের **সদৃশ ভেক্টর** (like vectors) বলা হয়। চিত্র 1A.3(a)-তে $\vec{P}$ ও $\vec{R}$ হল সদৃশ ভেক্টর এবং চিত্র 1A.3(b)-তে $\vec{X}$ ও $\vec{Y}$ হল সদৃশ ভেক্টর।

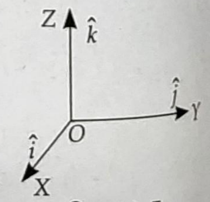
(d) একতলীয় ভেক্টর (Coplanar vectors) ঃ *একই তলে অবস্থিত ভেক্টরগুলিকে একতলীয় ভেক্টর বলা হয়।* চিত্র 1A.4-এ $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি একই তলে অবস্থিত। তাই এরা একতলীয় ভেক্টর।



চিত্র-1A.4

(e) একক ভেক্টর (Unit vector) ঃ *কোনো ভেক্টরের অভিমুখ নির্দেশকারী একক মান বিশিষ্ট ভেক্টর হল একক ভেক্টর।*

ধরা যাক, $\vec{A}$-এর পরম মান A এবং অভিমুখ নির্দেশকারী একক ভেক্টর $\hat{A}$। তাহলে $\hat{A} = \dfrac{\vec{A}}{A}$
$\therefore \vec{A} = A\hat{A}$



চিত্র-1A.5

■ **Basis vectors ঃ** কার্তেসীয় নির্দেশতন্ত্রে, $+X$, $+Y$ এবং $+Z$ অক্ষ বরাবর একক ভেক্টরগুলি হল যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$। কার্তেসীয় নির্দেশতন্ত্রে কোনো ভেক্টরকে প্রকাশ করা হয় $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$-এর সাহায্যে। তাই এদের বলা হয় **কার্তেসীয় নির্দেশতন্ত্রে basis vectors**।

যদি X, Y ও Z অক্ষ বরাবর একটি ভেক্টর $\vec{A}$-এর উপাংশগুলি হয় যথাক্রমে A_x, A_y ও A_z তবে $\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$

(f) **শূন্য ভেক্টর (Null vector) ঃ** *যদি ভেক্টর নির্দেশক কোনো রেখাংশের আদি বিন্দু এবং অন্তিম বিন্দু সমাপতিত হয় তবে ভেক্টরটির পরম মান শূন্য হয় এবং এর কোনো নির্দিষ্ট অভিমুখ থাকে না। একে বলা হয় শূন্য ভেক্টর বা অকার্যকর ভেক্টর।* শূন্য ভেক্টরকে $\vec{0}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ভেক্টর বীজগণিতে শূন্য ভেক্টর অত্যন্ত তাৎপর্যপূর্ণ। দুটি সমান ভেক্টরের বিয়োগফল বোঝাতে, দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের ক্রস গুণফল (cross product) বোঝাতে শূন্য ভেক্টর আবশ্যিক। শূন্য ভেক্টরের বৈশিষ্ট্যগুলি হল—

(i) $\vec{A}+\vec{0}=\vec{A}$

(ii) $\vec{A}-\vec{0}=\vec{A}$

(iii) $\vec{A}+(-\vec{A})=\vec{0}$

(iv) $k\cdot\vec{0}=\vec{0}$, যেখানে k হল একটি স্কেলার রাশি।

(v) $0\cdot\vec{A}=\vec{0}$

1A.3 ভেক্টরের প্রকারভেদ (Types of Vectors)

ভেক্টর রাশিগুলিকে দুই প্রকারে ভাগ করা যায়—মেরু ভেক্টর (polar vectors) এবং অক্ষীয় ভেক্টর (axial vectors)।

(a) **মেরু ভেক্টর (Polar vectors) ঃ** *যে সমস্ত ভেক্টরকে সংশ্লিষ্ট রাশির অভিমুখে তিরচিহ্নযুক্ত রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায় তাদের বলা হয় পোলার ভেক্টর বা মেরু ভেক্টর।*

- **উদাহরণ ঃ** সরণ, বেগ, ত্বরণ, বল, রৈখিক ভরবেগ ইত্যাদি।

এই ভেক্টরের অভিমুখ নির্দেশতন্ত্র নিরপেক্ষ এবং এদের অভিমুখ দর্পণ প্রতিফলনে অপরিবর্তিত থাকে।

(b) **অক্ষীয় ভেক্টর (Axial vectors) ঃ** *যে সমস্ত ভেক্টর কোনো না কোনো প্রকার ঘূর্ণনের সঙ্গে সম্পর্কিত, যাদের ঘূর্ণাক্ষের সমান্তরাল রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং যাদের অভিমুখ দক্ষিণাবর্তী স্ক্রু নিয়ম দ্বারা নির্ধারিত হয় তাদের বলা হয় অক্ষীয় ভেক্টর।*

- **উদাহরণ ঃ** কৌণিক সরণ, কৌণিক ত্বরণ, কৌণিক বেগ, টর্ক ইত্যাদি।

এই ভেক্টরের অভিমুখ নির্দেশতন্ত্রের উপর নির্ভরশীল এবং এদের অভিমুখ দর্পণ প্রতিফলনে উল্টে যায়।

1A.4 ভেক্টরের যোগ (Vector Addition)

দুটি ভেক্টরের যোগ করা হয় ত্রিভুজ সূত্র এবং সামান্তরিক সূত্রের সাহায্যে। সূত্রগুলি হল নিম্নরূপ ঃ

(a) **ত্রিভুজ সূত্র (Triangle law) ঃ** *দুটি সমজাতীয় ভেক্টরকে যদি কোনো ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত দুটি বাহু দ্বারা মানে ও অভিমুখে সূচিত করা যায় তবে বিপরীতক্রমে গৃহীত তৃতীয় বাহুটি ভেক্টর দ্বয়ের লব্ধিকে মানে ও অভিমুখে প্রকাশ করবে।*

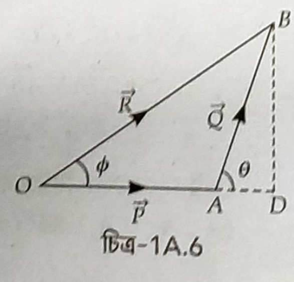
চিত্র 1A.6-এ দুটি সমজাতীয় ভেক্টর $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ ত্রিভুজ OAB এর ক্রমানুসারে গৃহীত বাহু $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা মানে এবং অভিমুখে প্রকাশিত হয়। সুতরাং, বিপরীতক্রমে গৃহীত তৃতীয় বাহু অর্থাৎ $\overrightarrow{OB}$ ঐ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি $\vec{R}$ -কে মানে এবং অভিমুখে প্রকাশ করবে।

অর্থাৎ, $\vec{R}=\vec{P}+\vec{Q}$

$\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ θ হলে লব্ধির মান হবে,

$$R=\sqrt{P^2+Q^2+2\cdot P\cdot Q\cdot\cos\theta}$$

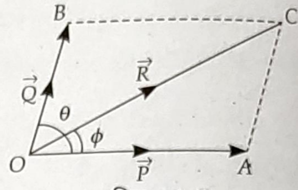
লব্ধি ভেক্টর $\vec{R}$, $\vec{P}$ ভেক্টরটির সঙ্গে ϕ কোণ করলে, $\tan\phi=\dfrac{Q\sin\theta}{P+Q\cos\theta}$



চিত্র-1A.6

(b) সামান্তরিক সূত্র (Parallelogram law) ঃ *কোনো বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি সমজাতীয় ভেক্টরকে যদি কোনো সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা মানে ও অভিমুখে প্রকাশ করা যায় তবে ওই বিন্দু থেকে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণটি ভেক্টর দুটির লব্ধিকে মানে ও অভিমুখে প্রকাশ করবে।*

1A.7 নং চিত্রে দুটি সমজাতীয় ভেক্টর $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$, O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। ভেক্টরদুটি $OACB$ সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয় যথাক্রমে $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ দ্বারা মানে ও অভিমুখে সূচিত। সুতরাং, O বিন্দু থেকে অঙ্কিত $\overrightarrow{OC}$ কর্ণটি ওই ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধিকে মানে ও অভিমুখে প্রকাশ করে। সুতরাং, ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রানুযায়ী,



চিত্র-1A.7

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

$\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটির অন্তর্গত কোণ θ হলে লব্ধি ভেক্টর $\vec{R}$ -এর মান হবে,

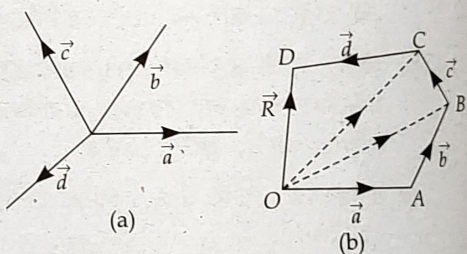
$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2P \cdot Q \cdot \cos\theta}$$

আবার লব্ধি ভেক্টর $\vec{R}$ -এর অভিমুখ $\vec{P}$ -এর সঙ্গে ϕ কোণ উৎপন্ন করলে

$$\tan\phi = \frac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}$$

■ বহুভুজ সূত্র (Polygon rule) ঃ *যদি কতকগুলি সমজাতীয় ভেক্টরকে একটি উন্মুক্ত বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলি দ্বারা মানে ও অভিমুখে প্রকাশ করা যায় তবে বিপরীতক্রমে গৃহীত সর্বশেষ বাহুটি যা বহুভুজটিকে বন্ধ করে, ওই ভেক্টরগুলির লব্ধিকে মানে ও অভিমুখে প্রকাশ করবে।*

ধরা যাক, চারটি একতলীয় ভেক্টর $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ এবং $\vec{d}$ একটি উন্মুক্ত বহুভুজ $OABCD$-এর যথাক্রমে $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{CD}$ বাহুগুলির দ্বারা মানে ও অভিমুখে প্রকাশিত। সুতরাং, বিপরীতক্রমে গৃহীত সর্বশেষ বাহু $\overrightarrow{OD}$ [চিত্র 1A.8] ওই ভেক্টরগুলির লব্ধিকে মানে ও অভিমুখে প্রকাশ করবে।



চিত্র-1A.8

অর্থাৎ, $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

ত্রিভুজের সূত্রের সাহায্যে বহুভুজ সূত্রের প্রমাণ ঃ

OB এবং OC যুক্ত করা হল। এখন ΔOAB-এর $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{AB}$ হল একই ক্রমে ক্রিয়াশীল দুটি ভেক্টর। সুতরাং, ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী,

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \quad \text{... (i)}$$

একইভাবে ΔOBC-এর ক্ষেত্রে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী,

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad \text{... (ii)}$$ [(i)নং সমীকরণের সাহায্যে]

আবার ΔOCD-এর ক্ষেত্রে ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগে লেখা যায়,

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$ [(ii) নং সমীকরণের সাহায্যে]

$\therefore\ \vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ **(প্রমাণিত)**

ভেক্টর যোগের নিয়ম অত্যন্ত সরল। X, Y এবং Z অক্ষ বরাবর দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ -এর উপাংশগুলি যথাক্রমে (A_x, A_y ও A_z) এবং (B_x, B_y ও B_z) হলে

$\therefore \vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$

এবং $\vec{B} = \hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z$

ভেক্টর দুটির যোগফল $\vec{R}$ হলে,

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = \hat{i}(A_x + B_x) + \hat{j}(A_y + B_y) + \hat{k}(A_z + B_z)$

একইভাবে উক্ত ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফল $\vec{S}$ হলে,

$\vec{S} = \vec{A} - \vec{B} = \hat{i}(A_x - B_x) + \hat{j}(A_y - B_y) + \hat{k}(A_z - B_z)$

গাণিতিক উদাহরণ (Numerical Examples)

1. $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর যোগফলের মান ও অভিমুখ নির্ণয় করো।

» $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ -এর যোগফল $\vec{R}$ হলে,

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) + (2\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}) = 3\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

$\therefore$ $\vec{R}$ ভেক্টরের পরম মান, $R = \sqrt{3^2 + 3^2 + 1}$ একক $= \sqrt{19}$ একক

$\vec{R}$ -এর অভিমুখ যে একক ভেক্টর দ্বারা নির্দেশিত হয় তা হল,

$$\hat{R} = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{3\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{19}}.$$

2. 2 একক, 3 একক এবং 6 একক মানের তিনটি ভেক্টর কি ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রকে সিদ্ধ করবে? কারণসহ লেখো।

» প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রকে সিদ্ধ করে না। কারণ, আমরা জানি কোনো ত্রিভুজের যে-কোনো দুটি বাহুর যোগফল তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বড়ো হয়। কিন্তু এক্ষেত্রে তা হচ্ছে না।

1A.5 একটি স্কেলার রাশি দিয়ে একটি ভেক্টর রাশিকে গুণ (Multiplication of a Vector by a Scalar)

ধরা যাক, X, Y এবং Z অক্ষ বরাবর একটি ত্রিমাত্রিক ভেক্টর $\vec{A}$ -এর উপাংশগুলি হল যথাক্রমে A_x, A_y এবং A_z

$\therefore \vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$

সুতরাং, ভেক্টরটির পরম মান, $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

ভেক্টরটির অভিমুখ নির্দেশক একক ভেক্টর, $\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$

এখন ধরা যাক, ভেক্টরটিকে একটি স্কেলার λ দিয়ে গুণ করলে ভেক্টরটি হয় $\vec{B}$। অর্থাৎ $\vec{B} = \lambda\vec{A}$

$\therefore |\vec{B}| = |\lambda\vec{A}| = \lambda|\vec{A}| = \lambda A$

এবং $\vec{B}$ এর অভিমুখ নির্দেশকারী একক ভেক্টর,

$$\hat{B} = \frac{\vec{B}}{B} = \frac{\lambda\vec{A}}{\lambda A} = \frac{\vec{A}}{A} = \hat{A} = \frac{\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

সুতরাং, কোনো ভেক্টরকে কোনো স্কেলার দিয়ে গুণ করলে ভেক্টর রাশিটির মান স্কেলারটির মানের গুণে বৃদ্ধি পায় কিন্তু এর অভিমুখের কোনো পরিবর্তন ঘটে না, যদি স্কেলার রাশিটি ধনাত্মক হয়। কিন্তু স্কেলার রাশিটি ঋণাত্মক হলে লব্ধ ভেক্টরটির অভিমুখ বিপরীত হয়।

λ ও α যদি দুটি স্কেলার রাশি হয় তবে

① $\lambda(\alpha\vec{A}) = \lambda\alpha\vec{A} = \alpha(\lambda\vec{A}) = \vec{A}(\lambda\alpha)$ ② $(\lambda \pm \alpha)\vec{A} = \lambda\vec{A} \pm \alpha\vec{A}$

③ $\lambda(\vec{A} \pm \vec{B}) = \lambda\vec{A} \pm \lambda\vec{B}$

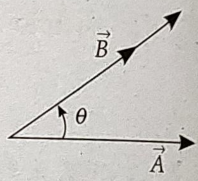
1A.6 ভেক্টরের গুণফল (Product of Vectors)

দুটি ভেক্টরের গুণফল দুইভাবে সংঘটিত হতে পারে—একটি ক্ষেত্রে গুণফল হয় স্কেলার এবং অপর ক্ষেত্রে গুণফল হয় ভেক্টর। তাই সাধারণভাবে ভেক্টর গুণফল দু-প্রকারের হয়— **❶ স্কেলার গুণফল বা ডট্ গুণফল** এবং **❷ ভেক্টর গুণফল বা ক্রস গুণফল**।

❶ স্কেলার গুণফল বা ডট্ গুণফল (Dot product) ঃ

ধরা যাক, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টরের পরম মান যথাক্রমে A ও B এবং এদের অন্তর্গত কোণ θ [চিত্র 1A.9]। সুতরাং, ডট্ গুণফলের সংজ্ঞা অনুযায়ী,

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta \qquad \text{... (i)}$$



চিত্র-1A.9

যেহেতু এক্ষেত্রে প্রাপ্ত ফল স্কেলার তাই এই গুণফলকে স্কেলার গুণফলও বলা হয়।

এখন, $\vec{B}\cdot\vec{A} = BA\cos(-\theta) = BA\cos\theta = \vec{A}\cdot\vec{B}$ ... (ii)

সুতরাং, ভেক্টরের ডট্ গুণফল বিনিময় সূত্র মেনে চলে।

■ **ডট্ গুণের তাৎপর্য (Significance of Dot product) ঃ** চিত্র 1A.9-এ $\vec{A}$ ভেক্টর অভিমুখে $\vec{B}$ ভেক্টরের স্কেলার উপাংশ, হল

$$B\cos\theta = \vec{B}\cdot\hat{A} = \frac{\vec{B}\cdot\vec{A}}{A}$$

$\therefore$ $\vec{A}$ ভেক্টর অভিমুখে $\vec{B}$ ভেক্টরের ভেক্টর উপাংশ হবে,

$$(B\cos\theta)\hat{A} = \left(\frac{\vec{B}\cdot\vec{A}}{A}\right)\hat{A} = \left(\frac{\vec{B}\cdot\vec{A}}{A}\right)\frac{\vec{A}}{A} = \frac{(\vec{B}\cdot\vec{A})\vec{A}}{A^2}$$

সুতরাং, দুটি ভেক্টরের ডট্ গুণফল একটি ভেক্টর অভিমুখে অপরটির উপাংশ নির্ণয়ে অত্যন্ত তাৎপর্যপূর্ণ।

■ **ডট্ গুণফলের কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ অনুসিদ্ধান্ত ঃ**

① $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরের অন্তর্গত কোণের মান θ হলে, $\cos\theta = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$

② $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব হলে, $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

③ $\vec{A}\cdot\vec{A} = A\cdot A\cdot\cos 0° = A^2 \qquad \therefore A = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$

■ **কার্তেসীয় নির্দেশতন্ত্রে বেসিস ভেক্টরগুলির ডট্ গুণফল (Dot products of the basis vectors in cartesian coordinate system) ঃ**

কার্তেসীয় নির্দেশতন্ত্রে বেসিস ভেক্টরগুলি হল $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$, যারা যথাক্রমে $+X$, $+Y$ এবং $+Z$ অক্ষ নির্দেশকারী একক ভেক্টর।

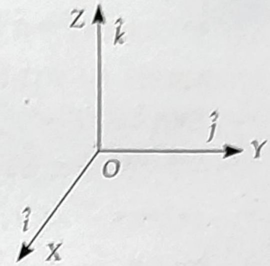
$\therefore\ \hat{i}\cdot\hat{i} = 1\cdot1\cos0° = 1$

একইভাবে $\hat{j}\cdot\hat{j} = 1$ এবং $\hat{k}\cdot\hat{k} = 1$

আবার, $\hat{i}\cdot\hat{j} = 1{\cdot}1{\cdot}\cos 90° = 0 = \hat{j}\cdot\hat{i}$

$\hat{j}\cdot\hat{k} = 1{\cdot}1{\cdot}\cos 90° = 0 = \hat{k}\cdot\hat{j}$

$\hat{k}\cdot\hat{i} = 1{\cdot}1{\cdot}\cos 90° = 0 = \hat{i}\cdot\hat{k}$



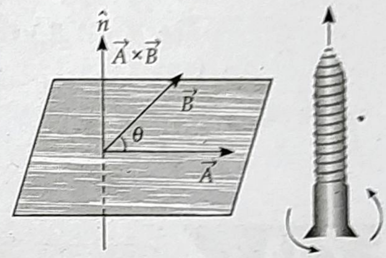
চিত্র-1A.10

❷ ভেক্টর গুণফল বা ক্রস গুণফল (Cross product) ঃ

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের পরম মান যথাক্রমে A ও B এবং এদের অন্তর্গত কোণের মান θ হলে ক্রস গুণের সংজ্ঞা হল,

$\vec{A} \times \vec{B} = (AB\sin\theta)\hat{n}$,

যেখানে, $\hat{n}$ হল $(\vec{A} \times \vec{B})$-এর অভিমুখ নির্দেশকারী একক ভেক্টর, যা $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যে তলে অবস্থিত সেই তলের অভিলম্ব এবং দক্ষিণাবর্তী স্ক্রু নিয়ম দ্বারা নির্ধারিত হয়। ধরা যাক, একটি দক্ষিণাবর্তী স্ক্রু-এর অক্ষ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় যে তলে অবস্থিত তার উপর লম্ব। এবার স্ক্রুটিকে $\vec{A}$ থেকে $\vec{B}$ -এর দিকে ঘোরালে এর সূচাগ্র যে দিকে অগ্রসর হয় $(\vec{A} \times \vec{B})$-এর অভিমুখ অর্থাৎ $\hat{n}$-এর অভিমুখ সেই দিকে হয় [চিত্র 1A.11]



চিত্র-1A.11

সুতরাং $\vec{B} \times \vec{A} = \{BA\sin(-\theta)\}\hat{n} = -(AB\sin\theta)\hat{n} = -\vec{A} \times \vec{B}$

$\therefore$ ভেক্টর গুণ বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।

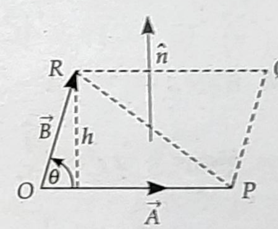
■ **ভেক্টর গুণের তাৎপর্য (Significance of cross-product) ঃ** ধরা যাক, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর একটি সামান্তরিক $OPQR$-এর দুটি সন্নিহিত বাহু যথাক্রমে $\overline{OP}$ এবং $\overline{OR}$ দ্বারা সূচিত হয় [চিত্র 1A.12]।

এখন ত্রিকোণমিতির সাধারণ ধারণা অনুযায়ী ΔOPR-এর ক্ষেত্রফল

$$\Delta = \frac{1}{2}\cdot OP\cdot h = \frac{1}{2}\cdot(OP)\cdot(OR\sin\theta)\ [\because \frac{h}{OR} = \sin\theta]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot A\cdot B\cdot\sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$$

$\therefore (\Delta)\hat{n} = \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|\hat{n}$; যেখানে $\hat{n}$ হল $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ -এর তলের অভিলম্ব একক ভেক্টর।



চিত্র-1A.12

$\therefore \vec{\Delta} = \frac{1}{2}(\vec{A} \times \vec{B})$

$\Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = 2\vec{\Delta}$ = সামান্তরিক $OPQR$-এর ক্ষেত্রফল।

সুতরাং, দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণফলের মান হল ওই ভেক্টর দুটিকে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের মানের সমান।

■ **ক্রস গুণফলের কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ অনুসিদ্ধান্ত ঃ**

① $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ θ হলে $\sin\theta = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{AB}$

② $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের সমান্তরাল হলে $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$ হয়।

③ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পরের লম্ব হলে $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$ হয়।

■ **কার্তেসীয় নির্দেশতন্ত্রে বেসিস ভেক্টরগুলির মধ্যে ক্রস গুণফল (Cross products of the basis vectors in cartesian coordinate system) ঃ** চিত্র 1A.10 থেকে লেখা যায়,

$\hat{i} \times \hat{i} = (1.1.\sin 0°)\hat{n} = \vec{0}$

অনুরূপে, $\hat{j} \times \hat{j} = \vec{0}$ এবং $\hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$

আবার, $\hat{i} \times \hat{j} = (1.1.\sin 90°)\hat{n}$। এক্ষেত্রে $\hat{n}$ হল $\hat{i}$ ও $\hat{j}$-এর তলের অভিলম্ব এবং দক্ষিণাবর্তী স্ক্রু নিয়ম দ্বারা নির্ধারিত অর্থাৎ $\hat{k}$।

$\therefore \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ কাজেই $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$

একইভাবে, $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$ কাজেই $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$ এবং $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$ কাজেই $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

ধরা যাক, $\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$ এবং $\vec{B} = \hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z$

$$\begin{aligned}\therefore \vec{A} \times \vec{B} &= (\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z) \times (\hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z)\\ &= \hat{k}A_xB_y - \hat{j}A_xB_z - \hat{k}A_yB_x + \hat{i}A_yB_z + \hat{j}A_zB_x - \hat{i}A_zB_y\\ &= \hat{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)\\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad \therefore \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$

1A.7 ভেক্টরের ত্রৈধ গুণন (Triple Product of Vectors)

ভেক্টরের ত্রৈধ গুণন দু-প্রকারের হয়— স্কেলার ত্রৈধ গুণন এবং ভেক্টর ত্রৈধ গুণন।

1 স্কেলার ত্রৈধ গুণন (Scalar triple product) :

$\vec{A}, \vec{B}$ ও $\vec{C}$ তিনটি ভেক্টরের ক্ষেত্রে স্কেলার ত্রৈধ গুণন হল,

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = [\vec{A}\ \vec{B}\ \vec{C}]$

■ **প্রমাণ :** ধরা যাক, $\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$, $\vec{B} = \hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z$ এবং $\vec{C} = \hat{i}C_x + \hat{j}C_y + \hat{k}C_z$

সুতরাং, $\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \hat{i}(B_yC_z - B_zC_y) + \hat{j}(B_zC_x - B_xC_z) + \hat{k}(B_xC_y - B_yC_x)$

$$\begin{aligned}\therefore \vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) &= (\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z).\{\hat{i}(B_yC_z - B_zC_y) + \hat{j}(B_zC_x - B_xC_z) + \hat{k}(B_xC_y - B_yC_x)\}\\ &= A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)\\ &= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \text{ [ডিটারমিন্যান্ট-এর ধর্ম অনুসারে]}\\ &= \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A}) = -\begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})\end{aligned}$$

$\therefore \vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})$ (প্রমাণিত)।

স্কেলার ত্রৈধ গুণনের জ্যামিতিক তাৎপর্য (Geometrical significance of scalar triple product) :

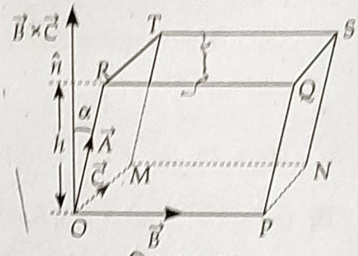
ধরা যাক, একটি ঘন সামান্তরিকের তিনটি বাহু $\vec{OP}$, $\vec{OM}$ এবং $\vec{OR}$ যথাক্রমে তিনটি ভেক্টর $\vec{B}$, $\vec{C}$ এবং $\vec{A}$ -কে মানে এবং অভিমুখে প্রকাশ করে। সুতরাং ঘন সামান্তরিকটির [চিত্র 1A.13] ভূমির ক্ষেত্রফল হল $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ দ্বারা বর্ণিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{B} \times \vec{C}|$। এখন $(\vec{B} \times \vec{C})$ ভেক্টরের অভিমুখ হল $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ -এর তলের অভিলম্ব যা $\hat{n}$ দ্বারা নির্দেশিত এবং ধরা যাক, $\hat{n}$, $\vec{A}$ -এর সঙ্গে α কোণে নত। সুতরাং ঘন সামান্তরিকটির উচ্চতা h হলে,

$$\frac{h}{A} = \cos\alpha \Rightarrow h = A.\cos\alpha$$

$\therefore$ ঘন সামান্তরিকটির আয়তন, $V = h|\vec{B} \times \vec{C}|$

$$= A|\vec{B} \times \vec{C}|\cos\alpha$$

$$= \vec{A}\cdot(\vec{B} \times \vec{C})$$



চিত্র-1A.13

সুতরাং $\vec{A}\cdot(\vec{B} \times \vec{C})$ হল আসলে $\vec{A}$, $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি যে ঘন সামান্তরিকের তিনটি বাহুকে সূচিত করে সেই ঘন সামান্তরিকের আয়তন।

অনুসিদ্ধান্ত (Corollary) :

$\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি যদি একতলীয় হয় তবে ভেক্টর তিনটি দ্বারা বর্ণিত ঘন সামান্তরিকের আয়তন শূন্য হয় অর্থাৎ $\vec{A}\cdot(\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ হয়।

সুতরাং, প্রদত্ত তিনটি ভেক্টর $\vec{A}$, $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ একতলীয় হওয়ার শর্ত হল $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ বা, $\vec{B}.(\vec{C} \times \vec{A}) = 0$ বা, $\vec{C}.(\vec{A} \times \vec{B}) = 0$

❷ ভেক্টর ত্রৈধ গুণ (Vector triple product) :

তিনটি ভেক্টর $\vec{A}$, $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ -এর ভেক্টর ত্রৈধ গুণের সংজ্ঞা হল,

$$\vec{A}\times(\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$(\vec{B} \times \vec{C})$ ভেক্টরটির অভিমুখ $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ -এর তলের অভিলম্ব হয়। আবার $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$-এর অভিমুখ $\vec{A}$ ভেক্টর এবং $(\vec{B} \times \vec{C})$ ভেক্টর এই দুইয়ের তলের উপর লম্ব হয়। সুতরাং $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ ভেক্টরটি $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ -এর তলে অবস্থিত হয়।

গাণিতিক উদাহরণ (Numerical Examples)

1. $\vec{A} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{C} + \vec{C} \times \vec{A} = 0$ **হলে ভেক্টর তিনটি একতলীয় কিনা বলো।**

» দেওয়া আছে $\vec{A} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{C} + \vec{C} \times \vec{A} = 0$

$\vec{A}$ -এর সঙ্গে ডট্ গুণ করে পাই,

$\vec{A}\cdot(\vec{A} \times \vec{B}) + \vec{A}\cdot(\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{A}\cdot(\vec{C} \times \vec{A}) = 0$

এখন $\vec{A}\cdot(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}\cdot(\vec{C} \times \vec{A}) = 0$

$\therefore \vec{A}\cdot(\vec{B} \times \vec{C}) = 0$

সুতরাং প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি একতলীয়।

2. **তিনটি ভেক্টর** $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$; $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ **এবং** $\vec{C} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$। λ**-এর মান কি হলে ভেক্টর তিনটি একতলীয় হবে?**

» ভেক্টর তিনটি একতলীয় হওয়ার শর্ত হল $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=0$

এখন, $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ 3 & -4 & \lambda\end{vmatrix}=3(\lambda-8)+2(\lambda+6)+1(-4-3)$

$$=3\lambda-24+2\lambda+12-7=5\lambda-19$$

ভেক্টর তিনটি একতলীয় হওয়ার জন্য $5\lambda-19=0$ হতে হবে

$\therefore\ \lambda=\dfrac{19}{5}$

3. দেখাও যে, $(\vec{\omega}\times\vec{r})^2=\vec{\omega}.\{\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\}$।

» $(\vec{\omega}\times\vec{r})^2=(\vec{\omega}\times\vec{r}).(\vec{\omega}\times\vec{r})$

$=\vec{\omega}.\{\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\}$ $[\because \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})]$ (প্রমাণিত)

4. $\vec{A}=2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{B}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{A}$ ভেক্টর অভিমুখে $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় করো।

» $\vec{A}$ ভেক্টর অভিমুখে $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশ $=\vec{B}\cdot\hat{A}=\dfrac{\vec{B}\cdot\vec{A}}{A}$

$$=\frac{(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})\cdot(2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{2-4+3}{3}=\frac{1}{3}$$

5. দেওয়া আছে $\vec{A}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $\vec{B}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$। $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ উভয়ের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় করো।

» আমরা জানি, $(\vec{A}\times\vec{B})$ ভেক্টরটি $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ উভয়ের উপর লম্ব। সুতরাং, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ উভয়ের উপর লম্ব একক ভেক্টরটি হল,

$$\hat{n}=\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}$$

এখন, $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=\hat{i}(4+3)-\hat{j}(2-6)+\hat{k}(-1-4)=7\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$

$$\therefore\ \hat{n}=\frac{7\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}}{\sqrt{49+16+25}}=\frac{7\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}}{\sqrt{90}}.$$

6. দেখাও যে, $\vec{A}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{B}=-2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের সমান্তরাল।

» $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\end{vmatrix}=\hat{i}(4-4)-\hat{j}(-2+2)+\hat{k}(4-4)=\vec{0}$

যেহেতু $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}$, কাজেই প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের সমান্তরাল (প্রমাণিত)।

7. দেখাও যে, $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})+\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})+\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{0}$। [CU 2003, BU 2017]

» ভেক্টর ত্রৈধ গুণের নিয়ম অনুসারে, $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$

অনুরূপে $\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}(\vec{B}\cdot\vec{A})-\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})$

এবং $\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}(\vec{C}\cdot\vec{B})-\vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A})$

$\therefore \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B})$

$= \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) + \vec{C}(\vec{B}\cdot\vec{A}) - \vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C}) + \vec{A}(\vec{C}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A})$

$= \vec{0}$ (প্রমাণিত)

8. p-এর মান কত হলে $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = p\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের লম্ব হবে?

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের লম্ব হবে যদি $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ হয়।

$\therefore (3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}) . (p\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow 3p - 12 + 15 = 0$

$\Rightarrow 3p = -3$

$\Rightarrow p = -1$

$\therefore p = -1$ হলে প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের লম্ব হবে।

9. দেওয়া আছে $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$। দেখাও যে, $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{C} = \vec{C} \times \vec{A}$।

$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$ বা, $\vec{A} + \vec{B} = -\vec{C}$

বা, $\vec{C} \times (\vec{A} + \vec{B}) = -\vec{C} \times \vec{C} = \vec{0}$ বা, $\vec{C} \times \vec{A} + \vec{C} \times \vec{B} = \vec{0}$

বা, $\vec{C} \times \vec{A} = -\vec{C} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{C}$

আবার, $\vec{A} + \vec{C} = -\vec{B}$ বা, $\vec{A} \times (\vec{A} + \vec{C}) = -\vec{A} \times \vec{B}$

বা, $\vec{A} \times \vec{C} = -\vec{A} \times \vec{B}$ বা, $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{A} \times \vec{C} = \vec{C} \times \vec{A}$

$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{C} = \vec{C} \times \vec{A}$ (প্রমাণিত)।

10. $(\vec{A} + \vec{B})\cdot\{(\vec{B} + \vec{C}) \times (\vec{C} + \vec{A})\} = ?$

$(\vec{B} + \vec{C}) \times (\vec{C} + \vec{A}) = \vec{B} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{A} + \vec{C} \times \vec{C} + \vec{C} \times \vec{A}$

$= \vec{B} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{A} + \vec{C} \times \vec{A}$ $[\because \vec{C} \times \vec{C} = \vec{0}]$

$\therefore (\vec{A} + \vec{B})\cdot\{(\vec{B} + \vec{C}) \times (\vec{C} + \vec{A})\} = (\vec{A} + \vec{B})\cdot\{(\vec{B} \times \vec{C}) + (\vec{B} \times \vec{A}) + (\vec{C} \times \vec{A})\}$

$= \vec{A}\cdot(\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{A}\cdot(\vec{B} \times \vec{A}) + \vec{A}\cdot(\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{B}\cdot(\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B}\cdot(\vec{B} \times \vec{A}) + \vec{B}\cdot(\vec{C} \times \vec{A})$

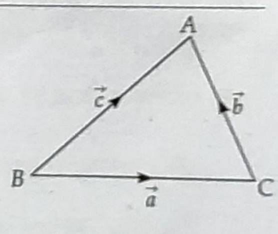
$= \vec{A}\cdot(\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B}\cdot(\vec{C} \times \vec{A})$ $[\because \vec{A}\cdot(\vec{B} \times \vec{A}) = \vec{A}\cdot(\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{B}\cdot(\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{B} \times \vec{A}) = 0]$

$= \vec{A}\cdot(\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{A}\cdot(\vec{B} \times \vec{C})$ $[\because \vec{B}\cdot(\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{A}\cdot(\vec{B} \times \vec{C})]$

$= 2\vec{A}\cdot(\vec{B} \times \vec{C})$

11. ভেক্টরের সাহায্যে একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রে প্রমাণ করো যে $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$।

চিত্রে দেখানো ABC ত্রিভুজটির ক্ষেত্রে লেখা যায়,



$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ... (i)

এক্ষেত্রে $\vec{a}$ ও $\vec{c}$-এর মধ্যবর্তী কোণ B, $\vec{b}$ ও $\vec{c}$-এর মধ্যবর্তী কোণ A এবং $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-এর মধ্যবর্তী কোণ $(\pi - C)$।

এখন (i) নং সমীকরণের উভয় পক্ষকে $\vec{b}$ দ্বারা ক্রস গুণ করে পাওয়া যায়,

$\vec{b} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b} \times \vec{c}$

বা, $\vec{b} \times \vec{a} + \vec{0} = \vec{b} \times \vec{c}$ $[\because \vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}]$

বা, $|\vec{b} \times \vec{a}| = |\vec{b} \times \vec{c}|$

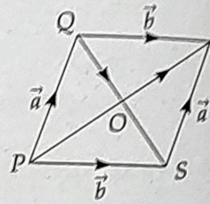
বা, $ba\sin(\pi - C) = bc\sin A$ বা, $ab\sin C = bc\sin A$ বা, $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায়, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (প্রমাণিত)।

12. দেখাও যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

ধরাযাক, $PQRS$ হল একটি সামান্তরিক যার কর্ণদ্বয় $\overrightarrow{PR}$ এবং $\overrightarrow{QS}$, O বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে। ধরা যাক, $\overrightarrow{PO} = m.\overrightarrow{PR}$ এবং $\overrightarrow{QO} = n.\overrightarrow{QS}$।



এখন ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী লেখা যায়, $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}$

$\therefore \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PQ} = \vec{b} - \vec{a}$

$\therefore \overrightarrow{QO} = n.\overrightarrow{QS} = n(\vec{b} - \vec{a})$ ... (i)

আবার, $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PR}$

$\therefore \overrightarrow{PR} = \vec{b} + \vec{a}$

$\therefore \overrightarrow{PO} = m.\overrightarrow{PR} = m(\vec{b} + \vec{a})$ ... (ii)

এখন, ΔPQO-এর ক্ষেত্রে লেখা যায়, $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QO} = \overrightarrow{PO}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{QO} = m(\vec{b} + \vec{a}) - n(\vec{b} - \vec{a})$

$\Rightarrow \vec{a} = (m - n)\vec{b} + (m + n)\vec{a}$

আবার যেহেতু $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় অরৈখিক, $m - n = 0$ এবং $m + n = 1$

$\therefore m = n = \frac{1}{2}$

সুতরাং প্রমাণিত হল যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

13. দেওয়া আছে $\vec{r} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{b}$ এবং $\vec{r} \cdot \vec{a} = 0$; $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$। $\vec{a}, \vec{b}$ ও $\vec{c}$-এর আকারে $\vec{r}$ ভেক্টরটি নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে $\vec{r} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{b}$

উভয় পক্ষকে বামদিক থেকে $\vec{a}$ দিয়ে ক্রস গুণ করে পাওয়া যায়,

$\vec{a} \times (\vec{r} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\vec{c} \times \vec{b})$ বা, $\vec{r}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a} \times (\vec{c} \times \vec{b})$

বা, $\vec{r}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times (\vec{c} \times \vec{b})$ $[\because \vec{r} \cdot \vec{a} = 0]$

$\Rightarrow \vec{r} = \frac{\vec{a} \times (\vec{c} \times \vec{b})}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$

14. একটি দৃঢ় বস্তু $(4\hat{j} - 3\hat{k})$ অক্ষের সমান্তরাল সাপেক্ষে 5 একক কৌণিক বেগে ঘূর্ণনশীল। অক্ষটি $(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$ বিন্দুগামী। $(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$ বিন্দুতে অবস্থিত একটি কণার গতিবেগ নির্ণয় করো। **[BU]**

কৌণিক গতিবেগের মান $\omega = 5$ একক।

ঘূর্ণাক্ষ অভিমুখে একক ভেক্টর, $\hat{n} = \frac{4\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{16+9}} = \frac{1}{5}(4\hat{j} - 3\hat{k})$

$\therefore$ বস্তুটির কৌণিক গতিবেগ, $\vec{\omega} = \omega\hat{n} = 4\hat{j} - 3\hat{k}$

এখন $(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$ বিন্দুর সাপেক্ষে কণাটির অবস্থান ভেক্টর,

$\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$

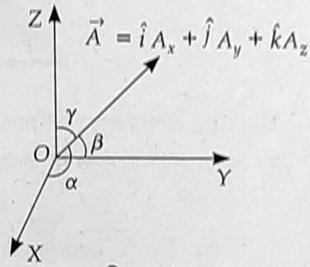
$\therefore$ কণাটির গতিবেগ হবে, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(16 - 12) - \hat{j}(0 + 6) + \hat{k}(0 - 8) = 4\hat{i} - 6\hat{j} - 8\hat{k}$ একক।

1A.8 একটি ভেক্টরের দিক কোসাইন (Direction Cosines of a Vector)

একটি ভেক্টর $+X$, $+Y$ এবং $+Z$ অক্ষের সঙ্গে যে যে কোণে আনত থাকে সেই কোণগুলির কোসাইনগুলিকে ওই ভেক্টরটির দিক্ কোসাইন বলা হয়।

চিত্র 1A.14-এ একটি ভেক্টর $\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$ ধনাত্মক X, Y এবং Z অক্ষের সঙ্গে যথাক্রমে α, β ও γ কোণে আনত। সুতরাং $\vec{A}$ ভেক্টরটির দিক কোসাইনগুলি হল যথাক্রমে $\cos\alpha$, $\cos\beta$ এবং $\cos\gamma$। এদের যথাক্রমে l, m ও n দ্বারা সূচিত করা হয়।



চিত্র-1A.14

$\therefore$ $\vec{A}$ ভেক্টরটির দিক কোসাইনগুলি হল,

$l = \cos\alpha,\ m = \cos\beta$ বং $n = \cos\gamma$

■ **দিক্ কোসাইনগুলির মধ্যে সম্পর্ক ঃ**

$\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$

$\therefore \hat{i}\cdot(\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z) = \hat{i}\cdot\vec{A}$ বা, $A_x = 1\cdot A\cos\alpha$

$\therefore l = \cos\alpha = \dfrac{A_x}{A}$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায়, $m = \cos\beta = \dfrac{A_y}{A}$ এবং $n = \cos\gamma = \dfrac{A_z}{A}$

$\therefore l^2 + m^2 + n^2 = \dfrac{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}{A^2} = \dfrac{A^2}{A^2} = 1$

$\therefore l^2 + m^2 + n^2 = 1$

■ **একক ভেক্টর ঃ** $\vec{A}$-এর অভিমুখে একক ভেক্টর হল $\hat{A} = \dfrac{\vec{A}}{A} = \hat{i}\dfrac{A_x}{A} + \hat{j}\dfrac{A_y}{A} + \hat{k}\dfrac{A_z}{A}$

$= \hat{i}l + \hat{j}m + \hat{k}n.$

সুতরাং কোনো ভেক্টরের দিক কোসাইনগুলি l, m, n হলে ওই ভেক্টরটির অভিমুখ নির্দেশকারী একক ভেক্টর হবে, $\hat{n} = \hat{i}l + \hat{j}m + \hat{k}n.$

গাণিতিক উদাহরণ (Numerical Examples)

1. একটি ভেক্টর $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$। ভেক্টরটির দিক্ কোসাইনগুলি নির্ণয় করো

» এক্ষেত্রে ভেক্টরটির x, y এবং z উপাংশগুলি হল যথাক্রমে $A_x = 1$, $A_y = 2$ এবং $A_z = 2$.

$\therefore$ ভেক্টরটির পরম মান, $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$ একক,

$\therefore$ ভেক্টরটির দিক্ কোসাইনগুলি হল $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

2. একটি ভেক্টরের পরম মান 5 একক, ভেক্টরটির দিক্ কোসাইনগুলি যথাক্রমে $\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\frac{1}{2}$ হলে ভেক্টরটি নির্ণয় করো।

এক্ষেত্রে $A = 5$ একক।

$\therefore \frac{A_x}{A} = l = \frac{1}{2} \Rightarrow A_x = \frac{A}{2} = \frac{5}{2}$ একক $\frac{A_y}{A} = m = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow A_y = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$ একক

এবং $\frac{A_z}{A} = n = \frac{1}{2} \therefore A_z = \frac{A}{2} = \frac{5}{2}$ একক

$\therefore \vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z = \left(\hat{i}\frac{5}{2} + \hat{j}\frac{5}{\sqrt{2}} + \hat{k}\frac{5}{2}\right)$

গুরুত্বপূর্ণ নিয়ম এবং সূত্রাবলি

1. ভেক্টর বীজগণিতের বিনিময় নিয়ম : $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

2. ভেক্টর বীজগণিতের সংযোগ নিয়ম :

$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

3. ভেক্টর বীজগণিতের বণ্টন নিয়ম :

(i) $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

(ii) $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

(iii) $k(\vec{A} + \vec{B}) = k\vec{A} + k\vec{B}$; k একটি স্কেলার রাশি।

4. $\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$ হলে ভেক্টরটির পরম মান,

$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

5. $\vec{A}$-এর অভিমুখে একক ভেক্টর হল $\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}$

6. শূন্য ভেক্টর ($\vec{0}$)-এর বৈশিষ্ট্যগুলি হল,

(i) $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$

(ii) $\vec{A} - \vec{0} = \vec{A}$

(iii) $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$

(iv) $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$, যেখানে k হল একটি স্কেলার রাশি।

(v) $0 \cdot \vec{A} = \vec{0}$

7. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ θ হলে ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির মান হবে, $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2A \cdot B \cdot \cos\theta}$

লব্ধি ভেক্টর $\vec{R}$, যদি $\vec{A}$-এর সঙ্গে ϕ কোণে আনত থাকে, তবে $\tan\phi = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}$

8. $\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$ এবং $\vec{B} = \hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z$ হলে,

(i) উক্ত ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল,

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = \hat{i}(A_x + B_x) + \hat{j}(A_y + B_y) + \hat{k}(A_z + B_z)$

(ii) উক্ত ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফল, $\vec{S} = \vec{A} - \vec{B}$

$= \hat{i}(A_x - B_x) + \hat{j}(A_y - B_y) + \hat{k}(A_z - B_z)$

9. λ ও α দুটি স্কেলার রাশি এবং $\vec{A}$ একটি ভেক্টর রাশি হলে,

(i) $\lambda(\alpha\vec{A}) = \lambda\alpha\vec{A} = \alpha(\lambda\vec{A}) = \vec{A}(\lambda\alpha)$

(ii) $(\lambda \pm \alpha)\vec{A} = \lambda\vec{A} \pm \alpha\vec{A}$

(iii) $\lambda(\vec{A} \pm \vec{B}) = \lambda\vec{A} \pm \lambda\vec{B}$

10. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ θ হলে,

(i) ভেক্টরদ্বয়ের ডট্ গুণফল : $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$

(ii) ভেক্টরদ্বয়ের ক্রসগুণফল $\vec{A} \times \vec{B} = (AB\sin\theta)\hat{n}$; যেখানে $\hat{n}$ হল $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর তলের অভিলম্ব একক ভেক্টর যার অভিমুখ দক্ষিণাবর্তী স্ক্রু নিয়ম দ্বারা নির্ধারিত।

11. $\vec{A}$ ভেক্টর অভিমুখে $\vec{B}$ ভেক্টরের

(i) স্কেলার অভিক্ষেপ $= \vec{B} \cdot \hat{A} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{A}$

(ii) ভেক্টর অভিক্ষেপ $= (\vec{B} \cdot \hat{A})\hat{A} = \frac{(\vec{B} \cdot \vec{A})\vec{A}}{A^2}$

12. $A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$

13. $|\vec{A} \times \vec{B}| = \vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় যে সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু সেই সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল।

14. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব হলে, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ এবং $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$

15. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের সমান্তরাল হলে

$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$

16. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ উভয়েরই উপর অভিলম্ব একক ভেক্টর হল,

$\hat{n} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$

17. $\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$ এবং $\vec{B} = \hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z$ হলে,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

18. স্কেলার ত্রৈধ গুণন :

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = [\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}] =$ $\vec{A}, \vec{B}$ এবং $\vec{C}$ ভেক্টরত্রয় বর্ণিত ঘন সামান্তরিকের আয়তন।

19. $\vec{A}, \vec{B}$ এবং $\vec{C}$ ভেক্টর ত্রয়ের একতলীয় হওয়ার শর্ত হল,

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$

20. ভেক্টর ত্রৈধ গুণন :

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

21. $\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$ ভেক্টরটির দিক কোসাইনগুলি যথাক্রমে l, m ও n হলে,

(i) $l = \frac{A_x}{A}, m = \frac{A_y}{A}$ এবং $n = \frac{A_z}{A}$

(ii) $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

(iii) ভেক্টরটির দিক নির্দেশকারী একক ভেক্টর হবে, $\hat{n} = \hat{i}l + \hat{j}m + \hat{k}n$.

ভেক্টর বীজগণিত সম্পর্কিত কিছু প্রশ্নোত্তর

1. $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টর দুটির অন্তর্নিহিত কোণের মান নির্ণয় করো। [CU 2016, 2011; BU 2016]

■ আমরা জানি, $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$

$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$

এখন, $\vec{A} \cdot \vec{B} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}) \cdot (4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$

$= 12 - 6 - 6 = 0$

$\therefore \cos\theta = 0$ বা, $\theta = \frac{\pi}{2}$

ভেক্টর দুটির অন্তর্নিহিত কোণের মান $\frac{\pi}{2}$ ।

2. x-এর কোন্ মানের জন্য ভেক্টরদ্বয় $\vec{A} = \hat{i} + x\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ পরস্পরের অভিলম্ব হবে? [CU 2015, 2013]

■ ভেক্টর দুটির লম্ব হওয়ার শর্ত হল, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

বা, $(\hat{i} + x\hat{j} + \hat{k}) \cdot (3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}) = 0$

বা, $3 - 2x - 2 = 0$ বা, $-2x + 1 = 0$

বা, $x = \frac{1}{2}$

3. $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরটির অভিমুখে একটি একক ভেক্টরের রাশিমালা নির্ণয় করো। [CU 2014]

■ $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$

$\therefore \vec{A}$ ভেক্টরটির পরম মান

$|\vec{A}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (1)^2}$ একক

$= \sqrt{9+16+1}$ একক $= \sqrt{26}$ একক

$\therefore \vec{A}$ ভেক্টর অভিমুখে একক ভেক্টর, $\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{26}}$

4. যদি $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$ হয়, তবে প্রমাণ করো $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ পরস্পরের লম্ব। [CU 2012, BU 2017]

■ প্রদত্ত, $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$

বা, $A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$

বা, $4AB\cos\theta = 90°$ বা, $\theta = 90°$

5. যদি $\vec{A}$ একটি স্থির মানের ভেক্টর রাশি হয়, তবে প্রমাণ করো $\frac{d\vec{A}}{dt}$ এবং $\vec{A}$ পরস্পরের উপর লম্ব। [CU 2011]

■ $\because \vec{A}$ একটি স্থির মানের ভেক্টর রাশি।

$\therefore \vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2$

বা, $2\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 2|\vec{A}| \frac{d}{dt}|\vec{A}|$

[t-এর সাপেক্ষে অবকল করে]

বা, $2\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 0$ [$\because \vec{A} =$ ধ্রুবক, $\therefore \frac{d}{dt}|\vec{A}| = 0$]

বা, $\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 0$

$\therefore$ প্রমাণ করা যায়, $\frac{d\vec{A}}{dt}$ এবং $\vec{A}$ পরস্পরের উপর লম্ব।