চিরায়ত বলবিজ্ঞান

এ.এম. হারুন অর রশীদ

সূচীপত্র

প্রথম অধ্যায় ঃ	**সদিক রাশি ও স্থানাঙ্ক প্রণালী**	**১**
	১.১ সদিক এবং নিদিক রাশি	২
	১.২ স্থানাঙ্কের ব্যবহার	৫
	১.৩ দুই সদিক রাশির গুণন	৭
	১.৪ সদিক রাশির অন্তরকলন	১২
	১.৫ গ্রেডিয়েন্ট কারক	১৩
	১.৬ সদিক অপেক্ষকের সমাকলন	১৬
	১.৭ গাউসের উপপাদ্য	২০
	১.৮ স্টোক্‌স-এর উপপাদ্য	২১
	১.৯ সাধারণ বক্ররৈখিক স্থানাঙ্ক	২৩
	প্রশ্নমালা	৩৬
দ্বিতীয় অধ্যায় ঃ	**নিউটনীয় গতিসূত্র**	**৩৮**
	২.১ নিউটনের গতিসূত্র এবং সংরক্ষণের আইন	৩৮
	২.২ বস্তুকণানিচয়ের সংরক্ষণ উপপাদ্য	৪৪
	২.৩ পরিবর্তনশীল ভর, রকেট	৫১
	২.৪ গতিশর্ত; সাধারণ স্থানাঙ্ক	৫৯
	২.৫ দা'লেমবার্তের নীতি	৬৪
	২.৬ দা'লেমবার্ত নীতি থেকে লাগ্রাঞ্জীয় গতিসমীকরণ	৬৮
	প্রশ্নমালা	৭৩
তৃতীয় অধ্যায় ঃ	**পরিবর্তন পদ্ধতিতে লাগ্রাঞ্জ গতিসমীকরণ**	**৭৬**
	৩.১ পরিবর্তন অন্তরকলন	৭৬
	৩.২ অয়লার সমীকরণ	৭৯
	৩.৩ হ্যামিলটনের নীতি এবং লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ নির্ধারণ	৮৯
	৩.৪ সীমাবদ্ধতার শর্তসহ লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ	৯৮
	প্রশ্নমালা	১০১
চতুর্থ অধ্যায় ঃ	**কেন্দ্রীয় বলের অধীনে যুগল বস্তুর গতি**	**১০৩**
	৪.১ দুটি বস্তুর বদলে সমতুল এক বস্তুর গতি	১০৩
	৪.২ কেন্দ্রীয় বলের অধীনে গতিপথ	১০৪

৪.৩ গ্রহের কক্ষপথ ১০৮
৪.৪ গ্রহগতির কেপলারের আইন ১১৪
৪.৫ গতি সমীকরণের সমাকলন ১১৬
৪.৬ কক্ষপথ নির্ধারণের সদিক পদ্ধতি ১১৯
৪.৭ কক্ষপথের পেডাল বা পদমূল সমীকরণ ১২২
৪.৮ সাধারণ বিভবক্ষেত্রে কক্ষপথ ১২৫
৪.৯ যথার্থ বৈষম্য এবং উৎকেন্দ্রিক বৈষম্য ১২৬
৪.১০ উপগ্রহের কক্ষপথ ১২৯
৪.১১ দুটি বস্তুকণা সংঘর্ষের সম্পর্কাবলী ১৩৬
৪.১২ বিকর্ষণী বলকেন্দ্র থেকে বিক্ষেপণ ১৪০
প্রশ্নমালা ১৪৩

পঞ্চম অধ্যায়ঃ দৃঢ়বস্তুর গতি বর্ণনা ১৪৯

৫.১ দৃঢ়বস্তুর স্বতন্ত্র স্থানাঙ্ক ১৪৯
৫.২ অভিলাম্বিক রূপান্তর ১৫২
৫.৩ রূপান্তর মেট্রিক্সের গুণন ১৫৬
৫.৪ অয়লার কোণ ১৬০
৫.৫ কৌণিক বেগের উপাংশ ১৬৪
৫.৬ দৃঢ়বস্তুর গতিসংক্রান্ত অয়লার উপপাদ্য ১৬৬
৫.৭ ঘূর্ণায়মান স্থানাঙ্ক ১৬৯
৫.৮ করিওলিস বল ১৭৩
৫.৯ কেন্দ্রাতিগ বলের প্রভাব ১৭৫
৫.১০ করিওলিস বলের প্রভাব ১৭৭
৫.১১ বায়ুগতি ১৭৯
৫.১২ ফুকো দোলক ১৮০
প্রশ্নমালা ১৮৭

ষষ্ঠ অধ্যায়ঃ দৃঢ়বস্তুর গতিবিজ্ঞান ১৮৯

৬.১ জড় টেন্সর ১৮৯
৬.২ জড়ত্বের মোমেন্ট সংক্রান্ত দুটি উপপাদ্য ১৯২
৬.৩ দৃঢ়বস্তুর কৌণিক ভরবেগ ১৯৭
৬.৪ প্রধান অক্ষ রূপান্তর ১৯৮

৬.৫ দৃঢ়বস্তুর প্রধান অক্ষের সাপেক্ষে গতিশক্তি ২০৩
৬.৬ মোমেন্টের ঘনউপবৃত্তক ২০৪
৬.৭ সাধারণীকৃত সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য ২০৬
৬.৮ অয়লারের গতি সমীকরণ ২১১
৬.৯ প্রতিসম বস্তুর মুক্তগতি ২১৪
৬.১০ প্রতিসম লাটিমের গতি ২১৬
প্রশ্নমালা ২২৪

সপ্তম অধ্যায়ঃ ক্ষুদ্র কম্পন তত্ত্ব ২২৭
৭.১ ক্ষুদ্র কম্পন ২২৭
৭.২ দুটি সংযুক্ত সুষম স্পন্দকের গতি ২৩২
৭.৩ মেট্রিক্স পদ্ধতি প্রয়োগ ২৩৪
প্রশ্নমালা ২৪৩

অষ্টম অধ্যায়ঃ হ্যামিল্টনীয় গতিসমীকরণ ২৪৪
৮.১ হ্যামিল্টনের অপেক্ষক ২৪৪
৮.২ হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষকের ভৌত তাৎপর্য ২৪৮
৮.৩ বিভিন্ন স্থানাঙ্কে হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক ২৫৪
৮.৪ হ্যামিল্টনের পরিমার্জিত পরিবর্তন নীতি ২৫৮
৮.৫ মেট্রিক্স আকারে হ্যামিল্টনের গতিসমীকরণ ২৬১
৮.৬ গতিসমীকরণের সিম্প্লেকটিক রূপ ২৬৩
৮.৭ দশা-স্থান এবং লিউভিলের উপপাদ্য ২৬৫
৮.৮ সাধারণীকৃত অভিঘাত ২৬৭
প্রশ্নমালা ২৭১

নবম অধ্যায়ঃ আইনানুগ রূপান্তর তত্ত্ব ২৭৪
৯.১ সময়-নিরপেক্ষ রূপান্তর ২৭৪
৯.২ দশাস্থানে স্টোক্স-এর উপপাদ্য ২৭৬
৯.৩ সৃজন অপেক্ষক ২৭৮
৯.৪ অন্যান্য পরিবর্তী রাশিতে সৃজনকারী অপেক্ষক ২৮২
৯.৫ আইনানুগ রূপান্তরের উদাহরণ ২৮৯
৯.৬ পয়সন-বন্ধনী ২৯২
৯.৭ ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র সংযোগ রূপান্তর ২৯৬

৯.৮ আইনানুগ রূপান্তরের সিম্প্লেকটিক শর্ত ২৯৮
৯.৯ লাগ্রাঞ্জ বন্ধনী ৩০৩
৯.১০ দশাস্থানের ক্ষুদ্র ঘন অংশের অপরিবর্তন ৩০৫
প্রশ্নমালা ৩০৫

দশম অধ্যায় ঃ হ্যামিল্টন-জেকোবী সমীকরণ ৩০৮

১০.১ হ্যামিল্টন-জেকোবী সমীকরণ ৩০৮
১০.২ বিশ্লিষ্টকরণযোগ্য বস্তুনিচয় ৩১৩
১০.৩ কার্য এবং কোণ পরিবর্তী রাশি ৩২২
১০.৪ কার্য-কোণ পরিবর্তী রাশির মাধ্যমে গ্রহগতি ৩২৭
১০.৫ জ্যোতির্বিদ্যার রাশিসমূহ ৩৩৮
প্রশ্নমালা ৩৪৪

প্রথম অধ্যায়

সদিক রাশি ও স্থানাঙ্ক প্রণালী

চিরায়ত বলবিদ্যা পদার্থবিজ্ঞানের অন্যতম মূল স্তম্ভ। আধুনিক বিজ্ঞানে বলবিদ্যার গুরুত্ব অপরিসীম। বলবিদ্যার মূল আইনগুলি সম্বন্ধে সুস্পষ্ট ধারণা না থাকলে বিজ্ঞানের কোন শাখায় সম্যক জ্ঞান লাভ করা সম্ভব নয়।

সপ্তদশ শতাব্দীর প্রথম দিক থেকেই বলবিদ্যার চর্চা শুরু। গতিবিজ্ঞানে প্রথম উল্লেখযোগ্য অবদান রাখেন গ্যালিলিও গ্যালিলি (১৫৬৪—১৬৪২)। গ্যালিলিওর অবদানের মৌলিক গুরুত্ব এই যে তিনিই প্রথম তত্ত্বের সঙ্গে পরীক্ষণলব্ধ সাক্ষ্যের যোগাযোগ ঘটানোর চেষ্টা করেছিলেন। এটাকেই আমরা সাধারণভাবে বৈজ্ঞানিক পদ্ধতি বলে থাকি। এর আগে শুধু কিছু যুক্তি এবং জ্ঞানী ব্যক্তির (যেমন এরিস্টটলের) বক্তব্যের ভিত্তিতেই প্রাকৃতিক ঘটনার আলোচনা করা হত। গ্যালিলিওর পরীক্ষণভিত্তিক বক্তব্য এসব কিছুর আমূল পরিবর্তন করে বিজ্ঞান সৃষ্টির সূচনা করেছিল। গতিবিজ্ঞানে তাঁর অবদানের আরো প্রসার ঘটেছিল ক্রিশ্চিয়ান হিগেন্স (১৬২৯-৯৫) এবং অন্যান্যের বিভিন্ন গবেষণায়।

কিন্তু গতিবিজ্ঞানের এই শুভ সূচনাকে যিনি দৃঢ় ভিত্তির উপর প্রতিষ্ঠা করেছিলেন তিনি হলেন আইজাক নিউটন (১৬৪২—১৭২৭)। নিউটন যে বছর জন্মগ্রহণ করেন সে বছরই গ্যালিলিও মারা যান। নিউটনের অনন্যসাধারণ গ্রন্থ প্রিন্সিপিয়া (১৬৮৭) গ্যালিলিওর আরব্ধ কাজেরই চূড়ান্ত বিকাশ। এই গ্রন্থই গতিবিজ্ঞানকে একটি বৈজ্ঞানিক এবং গাণিতিক বিষয়-শৃঙ্খলা হিসেবে সুপ্রতিষ্ঠিত করে। নিউটন ভর, ভরবেগ এবং বলের ধারণার সৃষ্টি করলেন এবং তাঁর বিখ্যাত গতিসূত্রের মাধ্যমে বস্তুকণার গতির তত্ত্ব উপহার দিলেন। আশ্চর্য এই যে তিনশ বছর পরেও নিউটনের গতিসূত্র এবং মহাকর্ষতত্ত্ব প্রায় অপরিবর্তিত রূপেই চলে আসছে। এর কারণ হল এই যে তাঁর আগে গ্যালিলিও গতির যে আইন পরীক্ষার মাধ্যমে পেয়েছিলেন এবং টাইকো ব্রাহে (১৫৬৪-১৬০১) আর জোহানেস্ কেপলার (১৫৭১-১৬৩০) গ্রহগতি সম্বন্ধে যেসব নিয়ম আবিষ্কার করেছিলেন, নিউটনের একীভূত তত্ত্বে সেসব কিছুরই মৌলিক ভিত্তিভূমি পাওয়া গিয়েছিল। মানুষের ইতিহাসে এটাই প্রথম ব্যাপক ভিত্তির একীভূত তত্ত্ব যা পরীক্ষণলব্ধ সাক্ষ্যের উপরে তৈরী, প্রত্যাদিষ্ট জ্ঞান নয়।

নিউটনের নীতি পরে দৃঢ়-বস্তুর গতির ক্ষেত্রে প্রসারিত করেছিলেন অয়লার (১৭৩৬), ডালেমবার্ট (১৭৪৩) এবং লাগ্রাঞ্জ (১৭৮৮)। আধুনিক বলবিদ্যার আলোচনা লাগ্রাঞ্জের প্রদর্শিত পদ্ধতিতেই আজকাল করা হয়ে থাকে।

১·১ সদিক এবং নির্দিক রাশি

ভৌত পরিমাপ সাধারণত দু'ধরনের : (১) নির্দিক (স্কেলার) রাশি, যার মান থাকে কিন্তু কোন দিক থাকে না এবং (২) সদিক (ভেক্টর) রাশি, যার মান এবং সংশ্লিষ্ট দিক উভয়ই থাকে।

সুতরাং নির্দিক রাশি হল সেসব ভৌত রাশি যাদের মান আছে কিন্তু কোন দিক নেই। যেমন বস্তুর ভর, আয়তন, তাপমাত্রা, সময় ইত্যাদি। নির্দিক রাশিকে শুধু তার মানের উপযুক্ত সংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করা হয়। যেমন কোন বস্তুর ভর ৬×১০^{২৪} কিলোগ্রাম বলতে আমরা বুঝি যে আমাদের একটি পূর্ব-নির্ধারিত ভরের একক কিলোগ্রামে ঐ বস্তুর ভর ৬×১০^{২৪}। এই বিপুল সংখ্যাটি আসলে পৃথিবীর ভর।

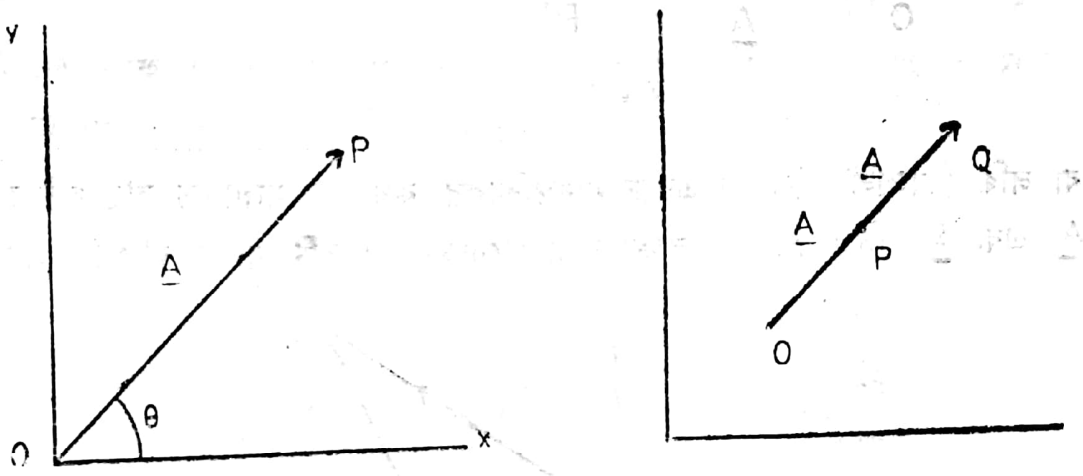
সদিক রাশি হল সেসব ভৌত রাশি যাদের মান এবং দিক দুটোই থাকে। যেমন বস্তুর সরণ, গতিবেগ, বল ইত্যাদি। সদিক রাশির সংজ্ঞা এভাবে না দিয়ে ব্যাপকভিত্তিতেও দেয়া যায় এবং গণিতশাস্ত্রে 'রৈখিক সদিক স্থানের' তত্ত্ব অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। কিন্তু পদার্থবিজ্ঞানীরাই প্রথম সদিক রাশির প্রবর্তন করেছিলেন উপরে দেয়া সহজ সংজ্ঞার মাধ্যমে। পদার্থবিজ্ঞান থেকেই গণিতের নানা বিভাগ এভাবে সৃষ্টি হয়েছে।

সদিক-রাশি বা ভেক্টর নির্দেশ করতে আমরা একটি ইংরেজি অক্ষর এবং তার উপরে তীরচিহ্ন বা নিচে দাগ ব্যবহার করি যেমন $\vec{A}$ অথবা $\underline{A}$। মুদ্রিত পুস্তকে অবশ্য দিক-রাশি মোটা অক্ষর দিয়ে দেখানো হয়ে থাকে যেমন **A**। সদিক রাশির মান যেহেতু একটি সংখ্যা তাই তাকে সাধারণ অক্ষর দিয়ে প্রকাশ করা হয় যেমন $\vec{A}$ সদিক রাশির মান A। অনেক সময় এই মান, $|\underline{A}|$ এভাবেও লেখা হয়।

সদিক রাশির মান 'এক' হলে অর্থাৎ সংশ্লিষ্ট এককের একগুণ হলে তাকে আমরা 'একক সদিক রাশি' (ইউনিট ভেক্টর) বলি। একক সদিক রাশির শুধু দিক থাকে এবং তার মান এক। একক সদিক রাশির সংশ্লিষ্ট দিক একটি টুপি

বা ক্যারেট দিয়ে দেখানো হয়। যেমন $\underline{x} = \hat{\underline{i}}\, x$ যার অর্থ হল $\underline{x}$ সদিক রাশির মান x এবং তার দিক $\hat{\underline{i}}$ একক সদিক রাশির পূর্বনির্ধারিত দিক।

সদিক রাশিকে চিত্রে দেখানোর জন্য তীরের ব্যবহার করা হয়। অবশ্য তীরটির দৈর্ঘ্য সদিক রাশির আনুপাতিক এবং তার দিক নির্দিষ্ট দিকের সমান্তরাল করে আঁকা প্রয়োজন। সুতরাং তীরের দৈর্ঘ্য এবং দিক যথাক্রমে সদিক রাশির মান এবং দিক নির্দেশ করে। এভাবে ১.১ (ক) চিত্রে একটি সদিক রাশি $\underline{A}$ দেখানো হয়েছে যা $\overrightarrow{OP}$ দিকবিশিষ্ট রেখাংশের সমান। এই সদিক রাশির মান OP দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক এবং তা Ox অক্ষের সঙ্গে θ কোণ করে।



(ক) চিত্র : ১.১ (খ)

স্পষ্টতই সদিক রাশিকে একটি নির্দিক রাশি দিয়ে গুণ করা যায়। $7\underline{A}$ বলতে আমরা বুঝি যে এটি একটি সদিক রাশি যার মান 7A এবং দিক $\underline{A}$ সদিক রাশির অভিমুখে একই দিকে। আসলে একটি সদিক রাশিকে ঐ একই সদিক রাশি m সংখ্যকবার যোগ করলে $m\underline{A}$ সদিক রাশি হয়,

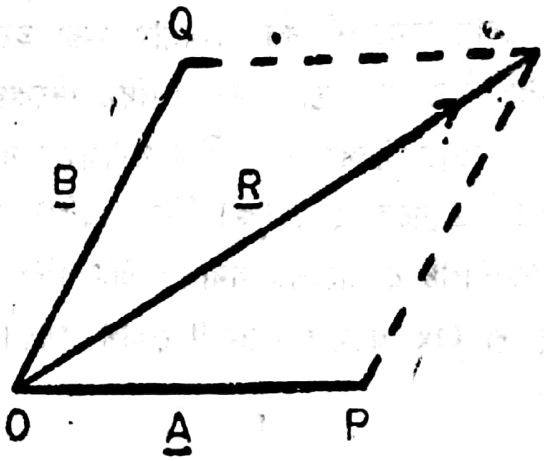
$$\underline{A} + \underline{A} + \ldots + \underline{A} = m\,\underline{A}$$
$$\longleftarrow\ m \text{ বার} \longrightarrow$$

১.১ (খ) চিত্রে $m = 2$ নিয়ে $\underline{A}$ এবং $\underline{A}$ এর যোগফল দেখানো হয়েছে। দুটি নির্দিক রাশি m এবং n নিয়ে, $\underline{A}$ সদিক রাশির জন্য আমরা লিখতে পারি,

$$(m+n)\,\underline{A} = m\,\underline{A} + n\,\underline{A}$$
$$m\,(n\underline{A}) = (mn)\,\underline{A}$$

অর্থাৎ নির্দিক রাশি দিয়ে সদিক রাশি গুণ করার নিয়ম বীজগণিতের বণ্টন (ডিস্ট্রিবিউটিভ) আইন মেনে চলে।

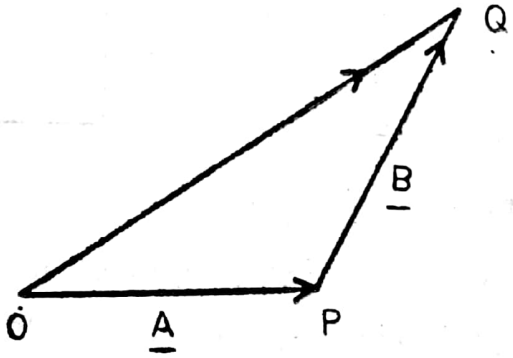
দুটি বিভিন্ন সদিক রাশির 'যোগফল' অথবা 'বিয়োগফল' সামন্তরিকের আইন দিয়ে পাওয়া যায়। এই আইন অনুসারে $\underline{A}$ এবং $\underline{B}$ দুটি সদিক রাশির যোগফল



$$\underline{R} = \underline{A} + \underline{B}$$

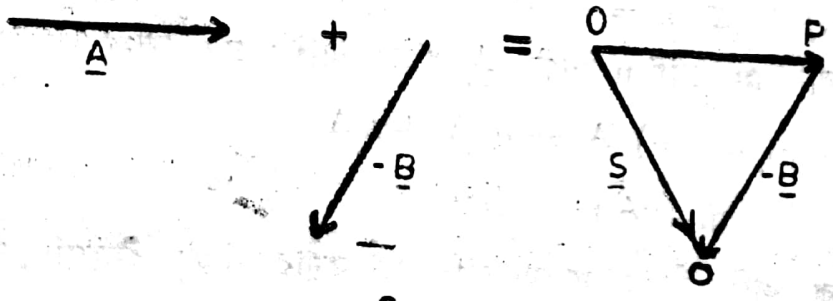
চিত্র : ১.২

বা লব্ধি (রেজাল্ট্যান্ট) হল একটি সামন্তরিকের কর্ণ যার সন্নিহিত বাহু দুটি হল $\underline{A}$ এবং $\underline{B}$ (চিত্র ১.২)। লক্ষ্য করা প্রয়োজন যে দুটি সদিক রাশিকে একই



চিত্র : ১.৩

মূলবিন্দু O থেকে আঁকা হয়েছে। সদিক রাশি দুটি একটির পর একটিও আঁকা যায় (চিত্র ১.৩) এবং সেক্ষেত্রে সদিক রাশির ত্রিভুজ আইন পাওয়া



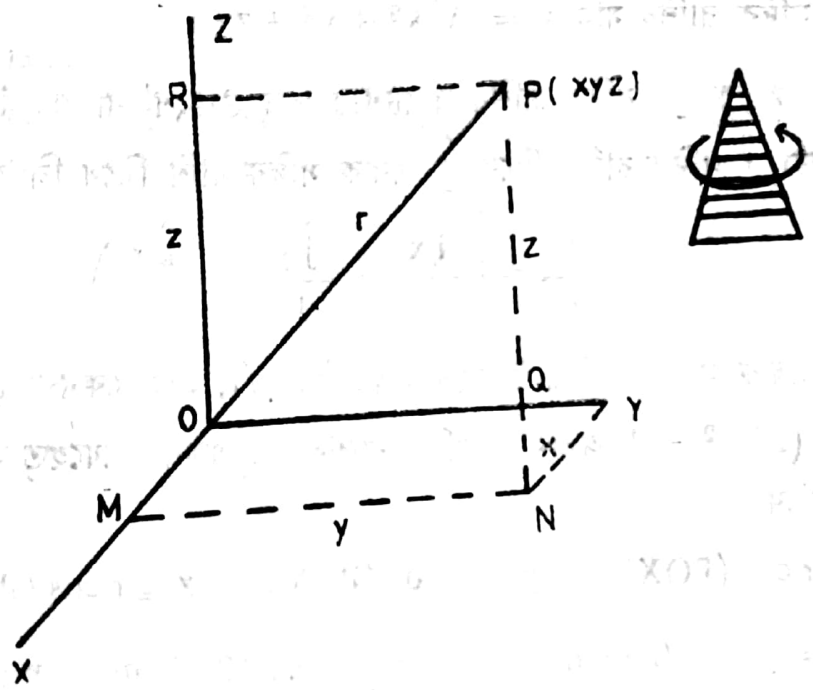
চিত্র : ১.৪

যায়। ত্রিভুজ আইন দিয়ে দুটি সদিক রাশির বিয়োগফল দেখানো সহজ (চিত্র ১.৪)। চিত্রে $\underline{A}$ সদিক রাশির সঙ্গে $-\underline{B}$ সদিক রাশির যোগফল দেখানো হয়েছে,

$$\underline{S} = \underline{A} + (-\underline{B}) = \underline{A} - \underline{B}$$

১.২ স্থানাঙ্কের ব্যবহার

ধরা যাক $\overrightarrow{OP} = \underline{r}$। O বিন্দু দিয়ে তিনটি পারস্পরিক লম্ব অক্ষরেখা টানা হল, OX, OY এবং OZ। ঐ তিনটি অক্ষরেখা দিয়ে ডান-হাতি 'স্থানাঙ্ক প্রণালী' সংজ্ঞা দেয়া হয় — এই অর্থে যে, যদি একটি ডান-হাতি স্ক্রু OX দিক থেকে OY এর দিকে ঘুরানো হয় তবে স্ক্রুটি OZ অক্ষরেখার দিকে অগ্রসর হবে। এই স্থানাঙ্ক প্রণালীকে কার্টেশীয় ডান-হাতি স্থানাঙ্ক প্রণালী বলে।



চিত্র : ১.৫

ধরা যাক P বিন্দু থেকে XOY তলের উপরে লম্ব হল PN এবং P বিন্দু থেকে OZ অক্ষরেখার উপর লম্ব হল PR। আবার N বিন্দু থেকে OX অক্ষরেখার উপরে লম্ব হল NM এবং OY অক্ষরেখার উপরে লম্ব হল NQ। ধরা যাক $OM = x$, $OQ = y$ এবং $OR = z$। তাহলে (x, y, z) কে P বিন্দুর কার্টেশীয় অক্ষাংশ বলা হয়। স্পষ্টতই x, y, z হল যথাক্রমে তিনটি স্থানাঙ্ক-তল YOZ, ZOX এবং XOY থেকে P বিন্দুর দূরত্ব।

এখন OX, OY এবং OZ অক্ষরেখার দিকে যথাক্রমে তিনটি একক সদিক রাশি $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ নেয়া যায় অর্থাৎ $\hat{i}$ সদিক রাশি OX অক্ষরেখার দিক নির্দেশ করে, ইত্যাদি। সুতরাং

$$\vec{OM} = \hat{i}\,x \qquad \vec{OQ} = \hat{j}\,y \qquad OR = \hat{k}\,z$$

যেহেতু

$$\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{OQ} + \vec{OR} \quad \text{এবং} \quad OP^2 = OM^2 + OQ^2 + OR^2$$

তাই আমরা পাই

$$\underline{r} = \hat{i}\,x + \hat{j}\,y + \hat{k}\,z \qquad (১.১)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (১.২)$$

অর্থাৎ $\underline{r}$ সদিক রাশির মান $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$।

এখন x, y, z কে $\underline{r}$ সদিক রাশির কার্টেশীয় 'লম্ব উপাংশ' বা শুধু উপাংশ বলা হবে। আমরা $\hat{r}$ সদিক রাশির দিকে $\underline{r}$ একক সদিক রাশি নিয়ে লিখতে পারি,

$$\hat{r} = \frac{\underline{r}}{r} = \left(\frac{\hat{i}\,x}{r} + \frac{\hat{j}\,y}{r} + \frac{\hat{k}\,z}{r}\right)$$

অর্থাৎ $\hat{r}$ একক সদিক রাশির উপাংশ হল x/r, y/r, z/r কেননা $(x/r)^2 + (y/r)^2 + (z/r)^2 = 1$ অর্থাৎ $\hat{r}$ সদিক রাশির মান একক। যেহেতু অভিক্ষেপের নিয়ম অনুসারে,

$$x = r\cos(POX) \qquad y = r\cos(POY) \qquad z = r\cos(POZ)$$

তাই $x/r = l$, $y/r = m$, $z/r = n$ যেখানে l, m, n হল সুপরিচিত দিক-কোসাইন। সুতরাং

$$\hat{r} = \hat{i}\,l + \hat{j}\,m + \hat{k}\,n$$

তিনটি সদিক রাশি $\underline{A}$, $\underline{B}$ এবং $\underline{C}$ একই তলে অবস্থিত হয় তখনই যখন

$$p_1\,\underline{A} + p_2\,\underline{B} + p_3\,\underline{C} = 0$$

যেখানে p_1, p_2 এবং p_3 যে কোন তিনটি নিদিক রাশি। অর্থাৎ যদি তিনটি সদিক রাশি এই শর্ত মেনে চলে তাহলে $\underline{A} = p\,\underline{B} + q\,\underline{C}$ যেখানে $p = -p_2/p_1$

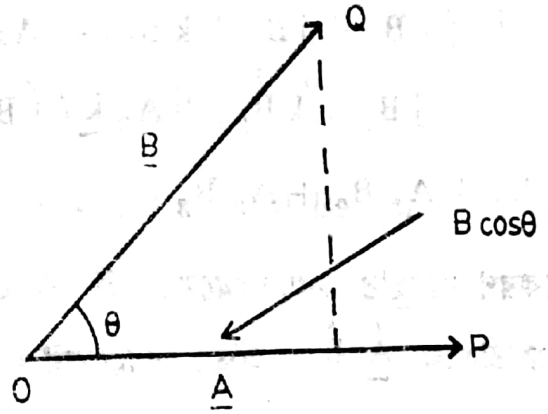
এবং $q = -p_3/p_1$ এবং তাই $\underline{B}$ ও $\underline{C}$ যে তলে অবস্থিত, $\underline{A}$ সদিক রাশিও সেই একই তলে অবস্থিত। $\underline{A}$, $\underline{B}$ এবং $\underline{C}$ সদিক রাশি তিনটিকে উপাংশে ভাগ করে তিনটি সমীকরণ পাওয়া যায়। তার থেকে A, B, C সদিক রাশির সমতলে শর্ত নির্ণায়ক দিয়ে লেখা যায়,

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

১·৩ দুই সদিক রাশির গুণন

দুটি সদিক রাশিকে 'গুণ' করলে একটি নিদিক রাশি অথবা একটি সদিক রাশি সৃষ্টি হতে পারে, কেননা তাছাড়া আর কোন রাশি তৈরি হওয়ার কোন উপায় নেই।

(ক) নিদিক গুণন : ১.৬ চিত্রে দুটি সদিক রাশি $\underline{A}$ এবং $\underline{B}$ দেখানো হয়েছে যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ। তাহলে $\underline{A}$ এবং $\underline{B}$ সদিক রাশির নিদিক



চিত্র : ১.৬

গুণনের মান হল AB cos θ এবং এটি আমরা একটি ডট বা বিন্দু দিয়ে লিখি,

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A\,B\cos\theta$$

যেহেতু $\underline{A}$ সদিক রাশির দিকে $\underline{B}$ সদিক রাশির অভিক্ষেপ হল B cos θ তাই নিদিক গুণনকে একটি সদিক রাশির মানকে অন্য সদিক রাশির অভিক্ষেপ দিয়ে গুণ করাও বলা যায়। সুতরাং $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A}$ অর্থাৎ নিদিক গুণন বিনিময় নিয়ম মেনে চলে।

যেহেতু যে-কোন সদিক রাশির জন্যে সংজ্ঞানুসারে,

$$\underline{A}^2 = \underline{A} \cdot \underline{A} = A\,A \cos\theta = A^2$$

তাই স্থানাঙ্ক অক্ষরেখার দিকে একক সদিক রাশিত্রয়ের জন্যে আমরা পাই,

$$\hat{\underline{i}}^2 = \hat{\underline{j}}^2 = \hat{\underline{k}}^2 = 1$$

$$\hat{\underline{i}} \cdot \hat{\underline{j}} = \hat{\underline{j}} \cdot \hat{\underline{k}} = \hat{\underline{k}} \cdot \hat{\underline{i}} = 0 \qquad (১.৩)$$

কেননা $\cos 90^\circ = 0$।

সহজেই প্রমাণ করা যায় যে তিনটি সদিক রাশির নিদিক গুণ বণ্টন নিয়ম মেনে চলে,

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C}$$

সুতরাং দুটি সদিক রাশি $\underline{A}$ এবং $\underline{B}$ উপাংশে ভাগ করে আমরা পাই,

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = (\underline{i}\,A_1 + \underline{j}\,A_2 + \underline{k}\,A_3) \cdot (\underline{i}\,B_1 + j\,B_2 + k\,B_3)$$

$$= A_1\,\underline{i} \cdot (\underline{i}\,B_1 + j\,B_2 + k\,B_3) + A_2\,\underline{j} \cdot (\underline{i}\,B_1 + j\,B_2 + k\,B_3) + A_3\,\underline{k}\,(\underline{i}\,B_1 + j\,B_2 + k\,B_3)$$

$$= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

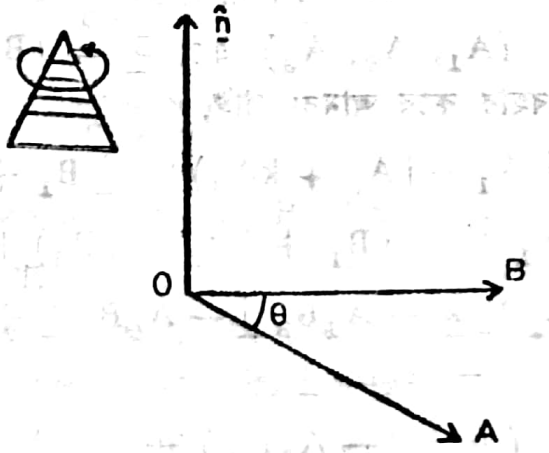
এখানে (১.৩) সমীকরণ ব্যবহার করা হয়েছে। যদি $\underline{A}$ এবং $\underline{B}$ সদিক রাশির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হয় তাহলে $\hat{\underline{A}} \cdot \hat{\underline{B}} = \cos\theta$ এবং তাই

$$\cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

কেননা $\hat{\underline{A}}$ সদিক রাশির উপাংশ (l_1, m_1, n_1) এবং $\hat{\underline{B}}$ সদিক রাশির উপাংশ (l_2, m_2, n_2)।

(খ) সদিক গুণন : ১.৭ চিত্রে $\underline{A}$ এবং $\underline{B}$ দিক রাশির অন্তর্ভুক্ত কোণ এবং $\underline{A}$ ও $\underline{B}$ যে তলে অবস্থিত তার উপর লম্বের দিককে $\hat{\underline{n}}$ একক সদিক রাশি দিয়ে দেখানো হয়েছে। লক্ষ্য করা দরকার যে $\underline{A}$, $\underline{B}$ এবং $\hat{\underline{n}}$ এই তিনটি সদিক রাশির মধ্যে ডান-হাতি স্ক্রু-র আইন বজায় রেখে $\hat{\underline{n}}$ সদিক রাশি আঁকা

হয়েছে অর্থাৎ একটি ডান-হাতি স্ক্রু $\underline{A}$ থেকে $\underline{B}$ সদিক রাশির দিকে ঘুরালে তা $\hat{\underline{n}}$ সদিক রাশির দিকে অগ্রসর হবে।



চিত্র : ১.৭

এখন $\underline{A}$ এবং $\underline{B}$ দিকরাশির 'সদিক গুণন' হল একটি সদিক রাশি যার মান $AB \sin\theta$ এবং যার দিক $\hat{\underline{n}}$। এই সদিক রাশিকে গুণ (ক্রস) চিহ্ন দিয়ে নির্দেশ করা হয়,

$$\underline{A} \times \underline{B} = \hat{\underline{n}}\, A B \sin\theta$$

স্পষ্টতই

$$\underline{B} \times \underline{A} = (-\hat{\underline{n}})\, A B \sin\theta$$

কেননা ডান-হাতি স্ক্রু ঘুরানোর নিয়ম অনুসারে $\underline{B}$ থেকে $\underline{A}$ সদিক রাশির দিকে স্ক্রু ঘুরালে তা $\hat{\underline{n}}$ সদিক রাশির বিপরীত দিকে অগ্রসর হবে। সুতরাং

$$\underline{A} \times \underline{B} = -\underline{B} \times \underline{A}$$

যেহেতু $\sin 0^\circ = 0$, তাই যে কোন সদিক রাশির জন্য $\underline{A} \times \underline{A} = 0$।

সুতরাং $\hat{\underline{i}}$, $\hat{\underline{j}}$, $\hat{\underline{k}}$ একক সদিক রাশির জন্য আমরা পাই,

$$\begin{aligned}
\underline{i} \times \underline{i} &= j \times j = \underline{k} \times \underline{k} = 0 \\
\underline{i} \times \underline{j} &= -\underline{j} \times \underline{i} = \underline{k} \\
\underline{j} \times \underline{k} &= -\underline{k} \times \underline{j} = \underline{i} \\
\underline{k} \times \underline{i} &= -\underline{i} \times \underline{k} = \underline{j}
\end{aligned} \qquad (১.৪)$$

নিদিক গুণনের মতই সদিক গুণনের জন্যও যে বণ্টন আইন সিদ্ধ তা প্রমাণ করা যায়,

$$\underline{A} \times (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \times \underline{B} + \underline{A} \times \underline{C}$$

সুতরাং যদি $\underline{A} = (A_1, A_2, A_3)$ এবং $\underline{B} = (B_1, B_2, B_3)$ হয়, তবে ১.৪ সমীকরণ ব্যবহার করে আমরা পাই,

$$\begin{aligned}\underline{A} \times \underline{B} &= \underline{i}\, A_1 + j A_2 + k A_3) \times (\underline{i}\, B_1 + j B_2 + k B_3) \\ &= A_1\, \underline{i} \times (i B_1 + j B_2 + k B_3) + \ldots \\ &= A_1 B_2\, \underline{k} - A_1 B_3\, \underline{j} - A_2 B_1\, \underline{k} + A_2 B_3\, \underline{i} + A_3 B_1\, \underline{j} \\ &\quad - A_3 B_2\, \underline{i} \\ &= \underline{i}\,(A_2 B_3 - A_3 B_2) + \underline{j}\,(A_3 B_1 - A_1 B_3) + \\ &\quad \underline{k}\,(A_1 B_2 - A_2 B_1)\end{aligned}$$

এই ফলকে আমরা নির্ণায়ক হিসেবে লিখতে পারি,

$$\underline{A} \times \underline{B} = \begin{vmatrix} \hat{\underline{i}} & \hat{\underline{j}} & \hat{\underline{k}} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

সুতরাং দুটি একক সদিক রাশি $\hat{\underline{A}}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ এবং $\hat{\underline{A}}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ এর জন্যে আমরা পাই

$$\hat{\underline{A}}_1 \times \hat{\underline{A}}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \underline{i}\,(m_1 n_2 - n_1 m_2) + \ldots$$

অর্থাৎ

$$\sin\theta = \sqrt{(m_1 n_2 - n_1 m_2)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2 + (l_1 m_2 - l_2 m_1)^2}$$

পদার্থবিজ্ঞানে নিদিক গুণনের উদাহরণ হল কাজ, কেননা $\underline{F}$ বল যদি কোন বস্তুকে $\underline{dr}$ দূরত্ব সরায় তবে কাজের পরিমাণ হল $F dr \cos\theta$, যেখানে θ হল বল এবং সরণের অন্তর্ভুক্ত কোণ, অর্থাৎ কাজ $dW = \underline{F} \cdot \underline{dr}$ যা একটি নিদিক রাশি। সদিক গুণনের উদাহরণ হিসেবে একটি বিদ্যুৎ আধান e-এর উপর সক্রিয় বল

নেয়া যায় যা একটি $\underline{B}$ চৌম্বক-ক্ষেত্রের সঙ্গে θ কোণ করে $\underline{v}$ গতিবেগে সঞ্চরণশীল। আধানের উপর পরীক্ষণলব্ধ বল হল,

$$\underline{F} = \frac{1}{c} ev B \sin\theta \hat{\underline{n}}$$

$$= \frac{e}{c} \underline{v} \times \underline{B}$$

যেখানে $\hat{\underline{n}}$ একক সদিক রাশি $\underline{v}$ এবং $\underline{B}$ সদিক রাশিদ্বয়ের সৃষ্ট তলের উপরে লম্ব। এখানে c হল আলোর গতিবেগ। আধান 'স্থির বিদ্যুতের এককে' (ই. এস. ইউ.) এবং চৌম্বকক্ষেত্র B 'বিদ্যুৎ-চৌম্বক এককে' (ই. এম. ইউ) প্রকাশ করা হয়েছে এবং c হল ই. এম. ইউ ও ই. এস. ইউ এককে আধানের অনুপাত। সুতরাং e আধানের উপর বিদ্যুৎ-ক্ষেত্র $\underline{E}$ এবং চৌম্বকক্ষেত্র $\underline{B}$ উভয় প্রয়োগ করলে তার উপর সৃষ্ট বলের পরিমাণ হল,

$$\underline{F} = e\underline{E} + \frac{e}{c} \underline{v} \times \underline{B}$$

যাকে লোরেন্স বল নামে আখ্যায়িত করা হয়।

(গ) ত্রয়ী গুণন : তিনটি সদিক রাশি $\underline{A}$, $\underline{B}$ এবং $\underline{C}$ দুভাবে গুণ করা যায়। একটিকে বলে 'নির্দিক ত্রয়ী গুণন' (স্কেলার ট্রিপ্‌ল প্রোডাক্ট) এবং অন্যটিকে বলে 'সদিক ত্রয়ী গুণন' (ভেক্টর ট্রিপ্‌ল প্রোডাক্ট)। সদিক রাশি $\underline{A}$ এবং আর একটি সদিক রাশি $\underline{B} \times \underline{C}$ থেকে নির্দিক ত্রয়ী গুণফল উৎপন্ন হয় এবং তা এভাবে লেখা হয়,

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \times \underline{C})$$

এখন সদিক রাশি $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ কে উপাংশে ভাগ করে লেখা যায়,

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \times \underline{C}) = A_1 (B \times C)_1 + A_2 (\underline{B} \times \underline{C})_2 + A_3 (\underline{B} \times \underline{C})_3$$

$$= A_1 (B_2C_3 - B_3C_2) + A_2 (B_3C_1 - B_1C_3) + A_3 (B_1C_2 - B_2C_1)$$

$$= \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

সুতরাং নির্ণায়কের গুণ অনুসারে আমরা লিখতে পারি,

$$\underline{A}.(\underline{B}\times\underline{C}) = \underline{B}.(\underline{C}\times\underline{A}) = \underline{C}.(\underline{A}\times\underline{B})$$

আবার তিনটি সদিক রাশি $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$'র সদিক ত্রয়ী গুণফল হল $\underline{A}$ সদিক রাশির সঙ্গে $\underline{B}\times\underline{C}$ সদিক রাশির সদিক গুণন,

$$\underline{A}\times(\underline{B}\times\underline{C})$$

যাকে উপাংশে ভাগ করে লেখা যায়,

$$\underline{A}\times(\underline{B}\times\underline{C}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ (\underline{B}\times\underline{C})_1 & (\underline{B}\times\underline{C})_2 & (\underline{B}\times\underline{C})_3 \end{vmatrix}$$

সুতরাং

$$\begin{aligned}
\underline{A}\times(\underline{B}\times\underline{C}) &= \underline{i}\,[A_2(B_1C_2-B_2C_1)-A_3(B_3C_1-B_1C_3)]+\ldots \\
&= \underline{i}\,[B_1(A_2C_2+A_3C_3)-C_1(A_2B_2+A_3B_3)]+\ldots \\
&= \underline{i}\,[B_1(A_1C_1+A_2C_2+A_3C_3) - \\
&\qquad C_1(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)]+\ldots \\
&= \underline{i}\,(B_1\underline{A}\cdot\underline{C}-C_1\underline{A}\cdot\underline{B})+\underline{j}\,(B_2\underline{A}\cdot\underline{C}-C_2\underline{A}\cdot\underline{B}) \\
&\qquad +\underline{k}\,(B_3\underline{A}\cdot\underline{C}-C_3\underline{A}\cdot\underline{B}) \\
&= (\underline{A}\cdot\underline{C})\,\underline{B}-\underline{C}\,(\underline{A}\cdot\underline{B})
\end{aligned}$$

১.৪ সদিক রাশির অন্তরকলন

অন্তরকলন তত্ত্বে একটি অপেক্ষক $y(x)$ কে স্বতন্ত্র পরিবর্তী রাশি x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করা হয়। একইভাবে একটি সদিক রাশি $\underline{r}$ একটি নির্দিক রাশি t এর উপর নির্ভরশীল হতে পারে। এ ধরনের অপেক্ষককে আমরা $\underline{r}(t)$ লিখে থাকি। যদি পরবর্তী রাশি $t+\delta t$ এর মানের জন্যে সদিক অপেক্ষকের মান $\underline{r}(t+\delta t) = \underline{r} + \delta\underline{r}$ হয় তাহলে অন্তরকলন সহগকে $d\underline{r}/dt$ লেখা যায় এবং তার সংজ্ঞা হল,

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\underline{r}}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{\underline{r}(t+\delta t) - \underline{r}(t)}{\delta t}$$

স্পষ্টতই $\underline{r}(t)$ এবং $\underline{r}(t+\delta t)$ সদিক রাশিদ্বয়কে উপাংশে প্রকাশ করে লেখা যায়,

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \hat{\underline{i}} \lim_{\delta t \to 0} \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t} + \ldots$$

$$= \hat{\underline{i}} \frac{dx}{dt} + \hat{\underline{j}} \frac{dy}{dt} + \hat{\underline{k}} \frac{dz}{dt}$$

অর্থাৎ কোন সদিক রাশির অন্তরকলন তার উপাংশের অন্তরকলনের সমষ্টি মাত্র।

যদি $\underline{A}$ এবং $\underline{B}$ দুটি সদিক রাশি t নির্দিক রাশির উপর নির্ভরশীল হয় তাহলে,

$$\frac{d}{dt}(\underline{A} \cdot \underline{B}) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{(\underline{A}+\delta\underline{A}) \cdot (\underline{B}+\delta\underline{B}) - \underline{A} \cdot \underline{B}}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \left(\underline{B} \cdot \frac{\delta \underline{A}}{\delta t} + \underline{A} \cdot \frac{\delta \underline{B}}{\delta t} \right)$$

$$= \underline{A} \cdot \frac{d\underline{B}}{dt} + \underline{B} \cdot \frac{d\underline{A}}{dt}$$

একইভাবে

$$\frac{d}{dt}(\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{A} \times \frac{d\underline{B}}{dt} + \frac{d\underline{A}}{dt} \times \underline{B}$$

এক্ষেত্রে $\underline{A}$ এবং $\underline{B}$ সদিক রাশির পর্যায়ক্রম বজায় রাখা প্রয়োজন।

১.৫ গ্রেডিয়েন্ট কারক

ধরা যাক কোন ত্রিমাত্রিক স্থানের $P(x, y, z)$ বিন্দুর সঙ্গে একটি নির্দিক ভৌতরাশি $\varphi(x, y, z)$-কে এককভাবে সংযুক্ত করা যায়। উদাহরণস্বরূপ আমরা মহাকর্ষ বিভবের উল্লেখ করতে পারি। সমগ্র স্থানে ঐ নির্দিক রাশির সামগ্রিক মান দিয়ে আমরা একটি নির্দিক ক্ষেত্রের সংজ্ঞা দেই। অর্থাৎ স্থানের প্রতিটি বিন্দুতে নির্দিক রাশি φ-এর মান জানা থাকলে আমরা তার সংশ্লিষ্ট ভৌতরাশি জানতে পারি। যেমন মহাকর্ষ বিভব জানা থাকলে আমরা মহাকর্ষ বল গণনা করতে পারি। অথবা কোন একটি ঘরে প্রতিটি স্থানীয় বিন্দুতে তাপমাত্রা

জানা থাকলে সমগ্র ঘরটির উত্তাপ পরিস্থিতি গণনা করা যায়। অন্তরকলন তত্ত্বের সংজ্ঞানুসারে একটি নির্দিক অপেক্ষকের সামগ্রিক অন্তরকলন হল,

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \qquad (১.৫)$$

এখন যে কোন একটি বক্ররেখা $\underline{s}$ নেয়া যায় যার ক্ষুদ্রাংশ $d\underline{s}$ এর উপাংশ হল (dx, dy, dz) অর্থাৎ

$$d\underline{s} = \hat{\underline{i}}\, dx + \hat{\underline{j}}\, dy + \hat{\underline{k}}\, dz \qquad (১.৬)$$

এই বক্ররেখা s এর সাপেক্ষ নির্দিক রাশি φ-এর অন্তরকলন হল,

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds} \qquad (১.৭)$$

স্পষ্টতই (১.৫) ও (১.৬) সমীকরণের ডানদিকের অংশ দুটি সদিক রাশির নির্দিক গুণফলের মতো মনে হয়। বাস্তবিকপক্ষে আমরা যদি নিচের সংজ্ঞার মাধ্যমে,

$$\underline{\nabla}\varphi = \underline{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \underline{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \qquad (১.৮)$$

'ডেল কারক' বা 'গ্রেডিয়েন্ট কারকের' প্রবর্তন করি, তাহলে (১.৫) সমীকরণকে লেখা যায়।

$$d\varphi = \underline{\nabla}\varphi . d\underline{s} \qquad (১.৯)$$

আবার s বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকের দিক $\hat{\underline{s}}$ সদিক রাশি দিয়ে নির্দেশ করলে,

$$\hat{\underline{s}} = \underline{i}\frac{dx}{ds} + \underline{j}\frac{dy}{ds} + \underline{k}\frac{dz}{ds}$$

কেননা স্পর্শকের ঐ বিন্দুতে দিক-কোসাইন হল dx/ds, dy/ds এবং dz/ds। অতএব,

$$\frac{d\varphi}{ds} = (\underline{\nabla}\varphi)\cdot\hat{\underline{s}}$$

সুতরাং ডেল কারক অর্থাৎ

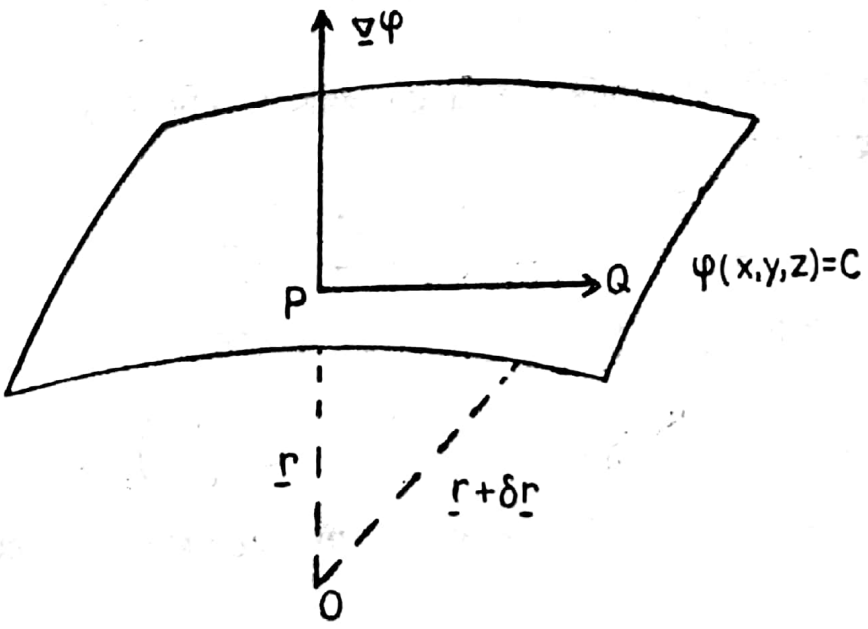
$$\underline{\nabla} = \underline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial v} + \underline{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

এমন একটি কারক যা একটি নিদিক রাশির উপর প্রয়োগ করলে একটি সদিক রাশি উৎপন্ন হয়,

$$\underline{A} = \underline{\nabla}\varphi$$

এখন একটি নির্দিক অপেক্ষক $\varphi(x, y, z)$ যদি নিচের সমীকরণ সার্থক করে,

$$\varphi(x, y, z) = \text{ধ্রুব রাশি} = C$$



চিত্র : ১.৮

তবে এই সমীকরণ দিয়ে একটি তল নির্দেশ করা হয় (চিত্র ১.৮)। ঐ তলের উপরে দুটি বিন্দুর অবস্থান $\underline{r}$ এবং $\underline{r} + \delta\underline{r}$ নেয়া যায়। যেহেতু P এবং Q বিন্দুদ্বয় একই তলে, তাই প্রথম আসন্ন মানে

$$\varphi(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) - \varphi(x, y, z)$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z$$

$$= 0$$

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে,

$$\underline{\nabla}\varphi \cdot \delta\underline{s} = 0$$

এখন P এবং Q যত কাছাকাছি আসে $\delta\underline{s}$ এর মান তত ক্ষুদ্র হয় এবং $\delta\underline{s}$ প্রান্তিক পর্যায়ে P বিন্দুতে তলের উপরে স্পর্শকে পর্যবসিত হয়। সুতরাং উপরের

সমীকরণ থেকে বলা যায় যে $\underline{\nabla}\,\varphi$ সদিক রাশি $P(x, y, z)$ বিন্দুতে $\varphi(x, y, z) = C$ এই তলের উপর লম্ব।

এখন ধরা যাক কোন স্থানের প্রতি বিন্দুতে একটি একক সদিক রাশি অপেক্ষক $\underline{F}(x, y, z)$-এর সংজ্ঞা দেয়া হয়েছে,

$$\underline{F}(x, y, z) = \underline{\hat{i}}\, F_1 + \underline{\hat{j}}\, F_2 + \underline{\hat{k}}\, F_3$$

যেখানে $F_i = F_i(x, y, z)$। এ ধরনের একটি সদিক ক্ষেত্র হল পৃথিবীর মহাকর্ষ বলের ক্ষেত্র।

সুতরাং $\underline{F}$ যদি একটি সদিক ক্ষেত্র হয় অর্থাৎ $\underline{F}$ যদি x, y, z এর উপর নির্ভরশীল হয় তবে,

$$\underline{\hat{i}} \cdot \frac{\partial \underline{F}}{\partial x} + \underline{\hat{j}} \cdot \frac{\partial \underline{F}}{\partial y} + \underline{\hat{k}} \cdot \frac{\partial \underline{F}}{\partial z}$$

এই নিদিক রাশিকে $\underline{F}$ অপেক্ষকের ডাইভারজেন্স বলে,

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{F} = \left(\underline{i}\, \frac{\partial}{\partial x} + \underline{j}\, \frac{\partial}{\partial y} + \underline{k}\, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \underline{F}$$

অর্থাৎ ডেল কারক $\underline{\nabla}$ এবং $\underline{F}$ সদিক রাশির নিদিক গুণফলকে $\underline{F}$ সদিক রাশির 'ডাইভারজেন্স' বলে,

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

একইভাবে ডেল কারক $\underline{\nabla}$ এবং $\underline{F}$ সদিক রাশির সদিক গুণফলকে $\underline{F}$ সদিক রাশির কার্ল বলে,

$$\underline{\nabla} \times \underline{F} = \left(\underline{\hat{i}}\, \frac{\partial}{\partial x} + \underline{\hat{j}}\, \frac{\partial}{\partial y} + \underline{\hat{k}}\, \frac{\partial}{\partial y} \right) \times \underline{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{\hat{i}} & \underline{\hat{j}} & \underline{\hat{k}} \\ \partial & \partial & \partial \\ \overline{\partial x} & \overline{\partial y} & \overline{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

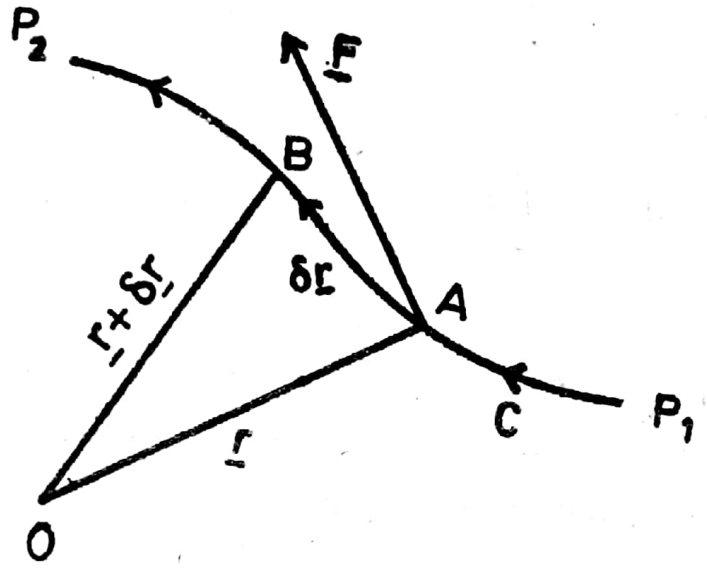
১·৬ সদিক অপেক্ষকের সমাকলন

কোন সদিক রাশি $\underline{F}$ যদি একটি নিদিক পরিবর্তী রাশি t এর উপর নির্ভরশীল হয় তবে $\underline{F}$ সদিক রাশির t এর সাপেক্ষে সমাকলন সংজ্ঞায়িত করার জন্য

$\underline{F}$ এর উপাংশ নেয়া হয়,

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{F}\,(t)\,dt = \underline{\hat{i}} \int_{t_1}^{t_2} F_1\,(t)\,dt + \underline{\hat{j}} \int_{t_1}^{t_2} F_2\,(t)\,dt + \underline{\hat{k}} \int_{t_1}^{t_2} F_3(t)dt$$

কিন্তু অনেক সময়ে কোন পরিবর্তী রাশির পথের উপরে সমাকলন করা প্রয়োজন হয়। যেমন কোন সাইকেল আরোহী P_1 বিন্দু থেকে P_2 বিন্দুতে গেলে তার



চিত্র : ১.৯

উপর বায়ুর প্রভাব গণনা করা প্রয়োজন হতে পারে। যদি C পথের কোন বিন্দুতে অবস্থান সদিক রাশি $\underline{r}$ এবং কাছাকাছি বিন্দুতে $\underline{r} + \delta\underline{r}$ হয় তাহলে পথের জ্যা হল $\delta\underline{r}$। এখন নির্দিক বা সদিক রাশি সময়ের উপর নির্ভরশীল হতে পারে, অবস্থানের উপরও নির্ভরশীল হতে পারে। এভাবে অবস্থানের উপর নির্ভরশীল একটি নির্দিক অপেক্ষক হল $\varphi\,(x, y, z)$ এবং সদিক অপেক্ষক হল $\underline{F}\,(x, y, z)$। প্রথমটিকে বলে নির্দিক ক্ষেত্র এবং দ্বিতীয়টিকে বলে সদিক ক্ষেত্র অপেক্ষক। স্পষ্টতই সংজ্ঞানুসারে,

$$\underline{F}\,(x, y, z) = \underline{i}\,F_1\,(x, y, z) + \underline{\hat{j}}\,F_2\,(x, y, z) + \underline{\hat{k}}\,F_3\,(x, y, z)$$

যেখানে F_i $(i = 1, 2, 3)$ হল নির্দিক অপেক্ষক। উদাহরণস্বরূপ বায়ুমণ্ডলের তাপমাত্রা যে কোন সময়ে অবস্থানের অপেক্ষক।

ধরা যাক ১.৯ চিত্রের C বক্ররেখার A বিন্দুতে একটি সদিক রাশি $\underline{F}$ (যা সাইকেল আরোহীর গতিবেগ হতে পারে) $\delta \underline{r}$ চাপের সঙ্গে θ কোণ করে। যেহেতু C বক্ররেখার উপর অগ্রসর হওয়ার সময় $\underline{F}$ সদিক রাশির দিক প্রতি বিন্দুতে পরিবর্তিত হয় তাই $\underline{F}$ সদিক রাশির C বক্ররেখার দিকে উপাংশের সঙ্গে dr ক্ষুদ্র বৃত্তচাপের গুণফল সমগ্র পথের উপর সমাকলন করা প্রয়োজন। এভাবেই রৈখিক সমাকলন পাওয়া যায়,

$$\int_C F \cos\theta \, dr = \int_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

উপাংশে ভাগ করে,

$$\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_C F_1 \, dx_1 + \int_C F_2 \, dx_2 + \int_C F_3 \, dx_3$$

যেখানে F_i হল $\underline{F}$ সদিক রাশির উপাংশ এবং dx_i হল C পথের ক্ষুদ্রাংশের উপাংশ। C পথটি আবদ্ধ ফাঁস (লুপ) হলে (অর্থাৎ যাত্রাবিন্দুতে সাইকেল আরোহী প্রত্যাবর্তন করলে) রৈখিক সমাকলন লেখা যায় এভাবে,

$$\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

অর্থাৎ C পথটি কোন বিন্দুতে শুরু হয়ে আবার সে বিন্দুতেই ফিরে এসে একটি ফাঁস বা লুপ তৈরি করে।

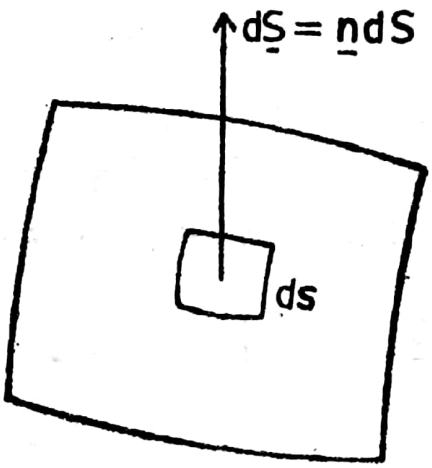
কোন সদিক রাশি অপেক্ষককে কোন তল S এর উপরে তল সমাকলন করে আমরা পাই

$$\iint_S \underline{A}\,(x, y, z) \cdot d\underline{S}$$

এখানে $d\underline{S}$ হল তলের একটি ক্ষুদ্রতম ক্ষেত্র। ১.১০ চিত্রে $d\underline{S}$ ক্ষেত্রফল দেখানো হয়েছে, যার মান হল dS এবং দিক হল ঐ তলের উপর লম্বের দিক। তলের

উপর লম্বের একক সদিক রাশি $\hat{\underline{n}}$ নেয়া হলে,

$$d\underline{S} = \hat{\underline{n}}\, dS$$



চিত্র : ১.১০

স্পষ্টতই $d\underline{S}$ সদিক রাশির উপাংশ হল তিনটি কার্টেশীয় অক্ষরেখা দিয়ে যে তিনটি তল সৃষ্টি হয় (YOZ, XOZ, এবং XOY তল) সেই তিনটি তলে উক্ত ক্ষুদ্র আয়তনের অভিক্ষেপ অর্থাৎ

$$dS_1 = dy\, dz \qquad dS_2 = dz\, dx \qquad dS_3 = dx\, dy$$

সুতরাং তল সমাকলন বলতে বোঝা যায়,

$$\iint_S \underline{A} \cdot d\underline{S} = \iint_S \underline{A} \cdot \underline{n}\, dS = \iint_S A_1\, dy\, dz + \iint_S A_2\, dz\, dx + \iint_S A_3\, dx\, dy$$

অতএব $\underline{A}$ সদিক রাশির S তলের উপর 'তল সমাকলন' হল $\underline{A}$ সদিক রাশির ঐ তলের উপর লম্ব উপাংশের অর্থাৎ $\underline{A} \cdot \hat{\underline{n}}$ এর সমাকলন। লক্ষ্য করা দরকার যে, ১.১০ চিত্রে লম্বের দিক উপরে বা নিচে দুদিকেই নেয়া যায়। প্রচলিত রীতি হল আবদ্ধ ক্ষেত্রফলের বহির্মুখী লম্ব হবে ধনাত্মক।

একটি সদিক রাশিকে ঘন আয়তন স্থানে সমাকলনের সংজ্ঞা হল,

$$\iiint_V \underline{A}\, dV = \underline{i} \iiint_V A_1(x, y, z)\, dV + \underline{j} \iiint_V A_2(x,y,z)\, dV + \hat{\underline{k}} \iiint_V A_3\, dV$$

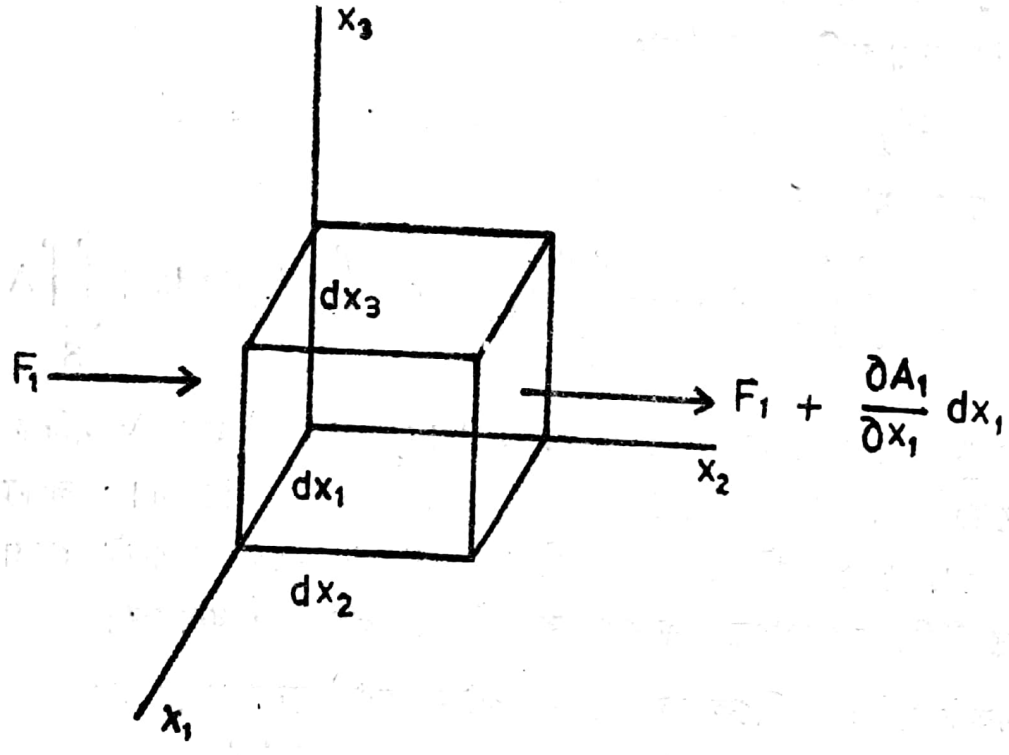
অর্থাৎ সদিক রাশির প্রতিটি উপাংশের ঘন আয়তনের উপরে সমাকলনের সদিক যোগফল হল সদিক রাশির ঘন সমাকলন।

১.৭ গাউসের উপপাদ্য

কোন আবদ্ধ তল S-এর পরিসীমার চারদিকে একটি সদিক অপেক্ষক $\underline{F}$ এর তল-সমাকলনের ফল ঐ পরিসীমা দিয়ে আবদ্ধ ঘন আয়তন V এর উপরে $\underline{F}$ সদিক রাশির ডাইভারজেন্সের ঘন সমাকলনের সমান। সুতরাং

$$\iint_S \underline{F} \cdot d\underline{S} = \iiint_V \underline{\nabla} \cdot \underline{F}\, dV$$

গাউসের এই উপপাদ্য প্রমাণ করতে হলে আমরা কোন তরল বা গ্যাসীয় পদার্থের (ফ্লুইডের) প্রবাহ কল্পনা করতে পারি। যে কোন ঘন আয়তন V-এর



চিত্র : ১.১১

একটি ক্ষুদ্র অংশ $dV = dx_1\, dx_2\, dx_3$ নেয়া যায় যার পৃষ্ঠতল তিনটি অক্ষরেখার উপরে লম্ব। স্পষ্টতই $\underline{F}$ সদিক রাশির F_1 উপাংশ x_1 অক্ষরেখার দিকে $dx_2 dx_3$ ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে প্রবাহের হার নির্দেশ করে। x_1 অক্ষরেখার উপর লম্ব

দুটি তলের প্রথমটির উপরে প্রবাহের হার F_1 এবং দ্বিতীয়টির উপর প্রবাহের হার,

$$F_1(x_1 + dx_1) = F_1(x_1) + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1$$

এখানে আমরা টেলর প্রসারণের প্রথম আসন্ন মান ব্যবহার করেছি। সুতরাং x_1 অক্ষরেখার উপরে লম্ব দুটি পৃষ্ঠতলের মধ্য দিয়ে মোট বহির্মুখী প্রবাহের হার হল,

$$\left(F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2\, dx_3 - F_1\, dx_2\, dx_3 = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dV$$

একইভাবে অন্য পৃষ্ঠতলগুলির অবদান গণনা করে আমরা সামগ্রিক প্রবাহের হার পাই,

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right) dV = \underline{\nabla} \cdot \underline{F}\, dV$$

আবার x_1 অক্ষরেখার উপরে লম্ব ক্ষেত্রফল $dx_2\, dx_3$ এবং প্রবাহ F_1 গুণ করে আমরা পাই ঐ ক্ষেত্রফলের উপর প্রবাহের হার (ফ্লাক্স),

$$F_1\, dx_2\, dx_3 = F_1\, dS_1$$

সুতরাং তিন জোড়া ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে প্রবাহের হারকে লেখা যায়,

$$F_1\, dS_1 + F_2\, dS_2 + F_2\, dS_2 = \underline{F} \cdot d\underline{S}$$

অতএব

$$\underline{F} \cdot d\underline{S} = \underline{\nabla} \cdot \underline{F}\, dV$$

এই সমীকরণ একটি ক্ষুদ্র ঘন আয়তন dV বিবেচনা করে পাওয়া গিয়েছে। সুতরাং সমগ্র ঘন আয়তন V নিয়ে আমরা পাই,

$$\iint_S \underline{F} \cdot d\underline{S} = \iiint_V \underline{\nabla} \cdot \underline{F}\, dV \qquad (১.১০)$$

যেখানে V ঘন আয়তনের আবদ্ধকারী পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল হল S।

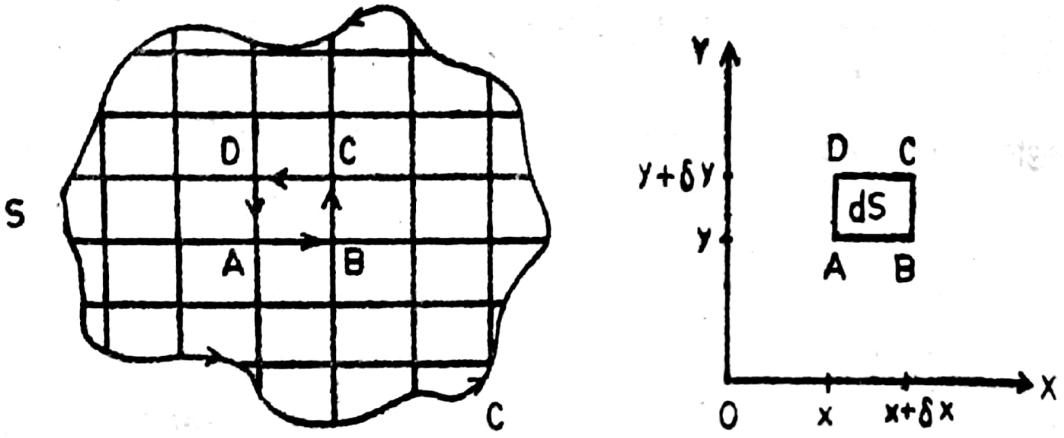
১.৮ স্টোকস্-এর উপপাদ্য

একটি সদিক অপেক্ষক $\underline{F}(x, y, z)$কে কোন একটি আবদ্ধ বক্ররেখা C এর উপরে রৈখিক সমাকলনের ফল ঐ $\underline{F}$ অপেক্ষকের কার্ল $\underline{\nabla} \times \underline{F}$ সদিক রাশির

C বক্ররেখার অন্তর্গত ক্ষেত্রফলের উপরে লম্ব-তলীয় সমাকলনের সমান,

$$\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{s} = \iint_S (\underline{\nabla} \times \underline{F}) \cdot \underline{n}\, dS$$

স্টোকস্ এর উপপাদ্য প্রমাণ করার জন্য একটি যে কোন আকৃতির পৃষ্ঠতল S নেয়া যায় যার পরিসীমা C। এই ক্ষেত্রফলকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র আয়তাকার ক্ষেত্রে ভাগ করা যায়, যার কোন একটি হল ABCD (চিত্র ১.১২)।



চিত্র : ১.১২

ধরা যাক কার্টেশীয় স্থানাঙ্কে $\underline{F}$ সদিক অপেক্ষকের উপাংশ $F_1(x, y, z)$ এবং $F_2(x, y, z)$। যেহেতু আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলি অতি ক্ষুদ্র তাই AB বাহুর উপরে F_1 এর গড় মান হল,

$$F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x}\,\frac{\delta x}{2}$$

এবং CD বাহুর উপরে F_1 এর গড় মান হল,

$$F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x}\,\frac{\delta x}{2} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\,\delta y$$

কেননা CD রেখার জন্যে y-অক্ষরেখার মান $y + \delta y$।

সুতরাং এই দুই বাহুর উপরে $\underline{F}$ সদিক রাশির সমাকলন হল

$$\int_A^B \underline{F} \cdot d\underline{s} + \int_C^D \underline{F} \cdot d\underline{s} = \left(F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x}\,\frac{\delta x}{2}\right)\delta x$$

$$-\left(F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x}\,\frac{\delta x}{2} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\,\delta y\right)\delta x = -\frac{\partial F_1}{\partial y}\,\delta x\,\delta y$$

একইভাবে অন্য দুটি বাহুর উপরে সমাকলন করে পাওয়া যায়,

$$\int_B^C \underline{F} \cdot d\underline{s} + \int_D^A \underline{F} \cdot d\underline{s} = \left(F_2 + \frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{\delta y}{2} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\delta x\right)\delta y$$

$$-\left(F_2 + \frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta y = \frac{\partial F_2}{\partial x}\delta x\,\delta y$$

সুতরাং ABCD আয়তক্ষেত্রের উপর রৈখিক সমাকলন হল

$$\int_{ABCD} \underline{F} \cdot d\underline{s} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\delta x\,\delta y$$

$$= (\underline{\nabla} \times \underline{F})_3\,\delta x\,\delta y = (\underline{\nabla} \times \underline{F}).\hat{\underline{k}}\,dS$$

কেননা $\underline{\nabla} \times \underline{F}$ সদিক রাশির তৃতীয় বা z-উপাংশ হল $\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y$। এভাবে C বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফলের প্রতিটি ক্ষুদ্র আয়তক্ষেত্রের পরিসীমার উপরে $\underline{F}$ সদিক অপেক্ষকের রৈখিক সমাকলন করা যায়। সমাকলনের ফল হল $\underline{\nabla} \times \underline{F}$ সদিক রাশির ক্ষেত্রফল dS-এর উপরে লম্ব-উপাংশ $(\underline{\nabla}\ \underline{F}) \cdot \underline{n}\ dS$।

লক্ষ্য করা দরকার যে, পাশাপাশি ক্ষুদ্র আয়তক্ষেত্রের প্রতি বাহুর রৈখিক সমাকলন সমান এবং বিপরীত। শুধু প্রান্তিক সীমারেখা C-এর অবদানই শেষ-পর্যন্ত সমাকলনে অবশিষ্ট থাকে। সুতরাং চূড়ান্ত পর্যায়ে আমরা পাই,

$$\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{s} = \int\int_S (\underline{\nabla} \times \underline{F}) \cdot \underline{n}\,dS \qquad (১.১১)$$

১.৯ সাধারণ বক্ররৈখিক স্থানাঙ্ক

কার্টেশীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতি অনেক সময়ে উপযোগী হয় না। সে ক্ষেত্রে অন্য কোন স্থানাঙ্ক ব্যবহার করা শ্রেয়। যেমন কোন সমস্যায় গোলাকার প্রতিসাম্য থাকলে বর্তুলাকার মেরুবর্তী (স্ফেরিকাল পোলার) স্থানাঙ্ক ব্যবহার করাই সহজ।

সাধারণভাবে ত্রিমাত্রিক জগতের যে কোন স্থানে একটি বিন্দুর অবস্থান তিনটি পরিবর্তী রাশি q_1, q_2, q_3 দিয়ে নির্দেশ করা যায়। কার্টেশীয় স্থানাঙ্কের

অক্ষাংশ x, y, z ঐ তিনটি রাশির অপেক্ষক হিসেবে চিন্তা করা যায়,

$$x = x\ (q_1, q_2, q_3) \quad y = y\ (q_1, q_2, q_3) \quad z = z\ (q_1, q_2, q_3)$$

এই সমীকরণগুলি সমাধান করে পাওয়া যায়,

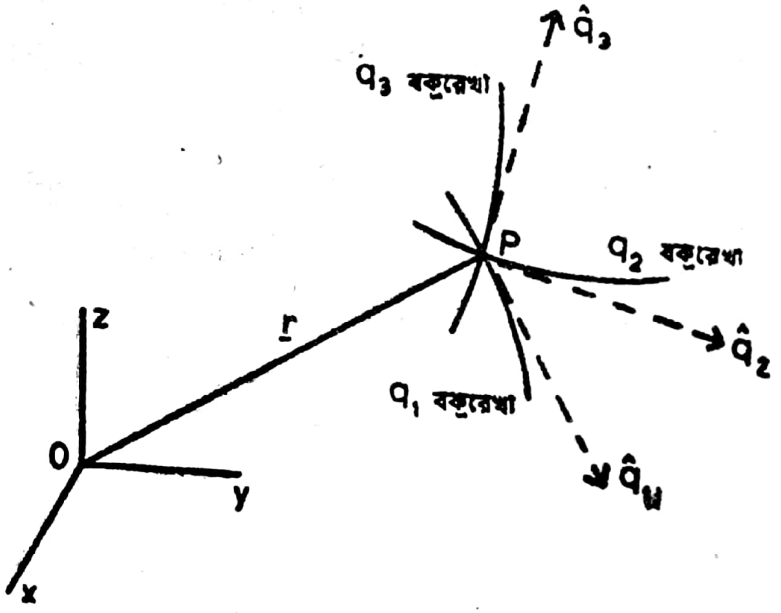
$$q_1 = q_1\ (x, y, z) \quad q_2 = q_2\ (x, y, z) \quad q_3 = q_3\ (x, y, z)$$

যদি অবশ্য রূপান্তরের 'জেকোবিয়ান নির্ণায়ক',

$$J = \frac{\partial (x, y, x)}{\partial (q_1, q_2, q_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \cdots & & \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix}$$

শূন্য না হয়।

ধরা যাক যে, কোন P বিন্দুর কার্টেশীয় স্থানাঙ্ক x,y,z এবং সাধারণ বক্ররৈখিক স্থানাঙ্ক q_1, q_2, q_3। এখন q_2 এবং q_3কে অপরিবর্তিত রেখে যদি শুধু q_1



চিত্র : ১.১৩

পরিবর্তন করা যায় তাহলে একটা খাঁজহীন বক্ররেখা পাওয়া যায় যা P বিন্দু দিয়ে যায় এবং যাকে q_1 বক্ররেখা বলা যায় (চিত্র ১.১৩)। একইভাবে q_2-বক্ররেখা এবং q_3-বক্ররেখার সংজ্ঞা দেয়া যায়। এই তিনটি রেখার স্পর্শকগুলিকে $\hat{q}_1$, $\hat{q}_2$, $\hat{q}_3$ একক সদিক রাশি বলা যায়। এভাবেই একটা স্থানীয় স্থানাঙ্ক স্থাপন

করা যায়। অবশ্য রীতি অনুযায়ী $\hat{\underline{q}}_1$, $\hat{\underline{q}}_2$, $\hat{\underline{q}}_3$ একক সদিক রাশি তিনটিতে ডানহাতি স্ক্রু'র নিয়ম বজায় থাকবে।

লক্ষ্য করা দরকার যে, এই নতুন স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা পরস্পরের উপর লম্ব হওয়ার প্রয়োজন নেই। অক্ষরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ তিনটিও পরিবর্তনশীল। তাছাড়া $\hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}}, \hat{\underline{k}}$ স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে $\hat{\underline{q}}_1$, $\hat{\underline{q}}_2$, $\hat{\underline{q}}_3$ স্থানাঙ্কের অবস্থানও এক বিন্দু থেকে অন্য বিন্দুতে ভিন্ন হতে পারে। সবশেষে q_1, q_2, q_3 রাশি তিনটি দৈর্ঘ্য নাও হতে পারে এবং dq_1, dq_2, dq_3 ক্ষুদ্রাংশগুলি তিনটি দিকে ds চাপের তিনটি অংশের সমান নাও হতে পারে।

এখন P বিন্দুর অবস্থান সদিক রাশি কার্টেশীয় পদ্ধতিতে লেখা যায়,

$$\underline{r} = \hat{\underline{i}}\, x + \hat{\underline{j}}\, y + \hat{\underline{k}}\, z$$

যেহেতু x, y, z সাধারণ বক্ররৈখিক স্থানাঙ্ক q_1, q_2, q_3 এর অপেক্ষক, তাই

$$\underline{r} = \hat{\underline{i}}\, x(q_1, q_2, q_3) + \hat{\underline{j}}\, y(q_1, q_2, q_3) + \hat{\underline{k}}\, z(q_1, q_2, q_3)$$

সুতরাং $\underline{r}$ সদিক রাশিকে $d\underline{r}$ পরিমাণে পরিবর্তন করলে, x, y, z এর পরিবর্তন হয় যথাক্রমে dx, dy, dz এবং q_1, q_2, q_3 এর পরিবর্তন হয় dq_1, dq_2, dq_3। অন্তরকলনের নিয়ম অনুসারে,

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3$$

এবং একইভাবে dy ও dz লেখা যায়। এখন যদি আমরা q_1 বক্ররেখার দিকে অগ্রসর হই তবে $dq_2 = dq_3 = 0$। সুতরাং সেক্ষেত্রে,

$$(d\underline{r})_{q_2, q_3} = (\underline{i}\, dx + \underline{j}\, dy + \underline{k}\, dz)_{q_2, q_3}$$

$$= \underline{i} \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \underline{j} \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \underline{k} \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1$$

এর থেকে q_1 এর সাপেক্ষে $\underline{r}$ সদিক রাশির আংশিক অন্তরকলন পাওয়া যায়,

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_1} = \underline{i} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \underline{j} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \underline{k} \frac{\partial z}{\partial q_1}$$

কিন্তু সংজ্ঞানুসারে একক সদিক রাশি $\hat{\underline{q}}_1$-কে লেখা যায়,

$$\hat{\underline{q}}_1 = \frac{\partial \underline{r}/\partial q_1}{|\partial \underline{r}/\partial q_1|} = \frac{\underline{i}\frac{\partial x}{\partial q_1} + \underline{j}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \underline{k}\frac{\partial z}{\partial q_1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{h_1}\left(\underline{i}\frac{\partial x}{\partial q_1} + \underline{j}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \underline{k}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)$$

যেখানে

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}$$

এই h_1 রাশির একটা সহজ জ্যামিতিক তাৎপর্য আছে। যখন শুধু q_1 পরিবর্তিত হয় তখন যে ক্ষুদ্রতম চাপ ds তৈরি হয় তার পরিমাণ হল

$$ds = \left|\left(\frac{d\underline{r}}{}\right)_{q_2, q_3}\right| = h_1\, dq_1$$

অর্থাৎ h_1 হল q_1 অক্ষরেখার দিকে আনুপাতিক (স্কেল) গুণিতক। একইভাবে h_2 এবং h_3 গুণিতক পাওয়া যায়,

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}$$

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}$$

যদি $\hat{\underline{q}}_1, \hat{\underline{q}}_2, \hat{\underline{q}}_3$ তিনটি একক সদিক রাশি পরস্পরের উপর লম্ব হয় তবে স্পষ্টতই এ ধরনের অভেদ সার্থক হবে,

$$\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_2} = 0$$

পদার্থবিজ্ঞানে ব্যবহৃত স্থানাঙ্কের বেশিরভাগ এসব সমীকরণ সিদ্ধ করে।

এখন স্থানীয় স্থানাঙ্কে সাধারণভাবে ক্ষুদ্রতম সরণ $d\underline{r}$ কে উপাংশে ভাগ করা যায়,

$$d\underline{r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_3} dq_3$$

$$= h_1\, dq_1\, \hat{\underline{q}}_1 + h_2\, dq_2\, \hat{\underline{q}}_2 + h_3\, dq_3\, \hat{\underline{q}}_3$$

এই পর্যায়ে আমরা যদি সাধারণ বক্ররৈখিক অক্ষরেখা তিনটিকে পরস্পরের উপর লম্বভাবে নেই তাহলে ক্ষুদ্রতম চাপের দৈর্ঘ্য হবে,

$$ds = |\,d\underline{r}\,| = \sqrt{(h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2}$$

উদাহরণস্বরূপ, বর্তুলাকার মেরুবর্তী স্থানাঙ্কে $h_1 = 1$, $h_2 = r$ এবং $h_3 = r \sin\theta$ এবং তাই

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2}$$

সাধারণ বক্ররৈখিক স্থানাঙ্কে গ্রেডিয়েন্ট কারক সহজেই প্রকাশ করা যায় কেননা,

$$(\underline{\nabla}\phi).\, d\underline{r} = d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial\phi}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial\phi}{\partial q_3} dq_3$$

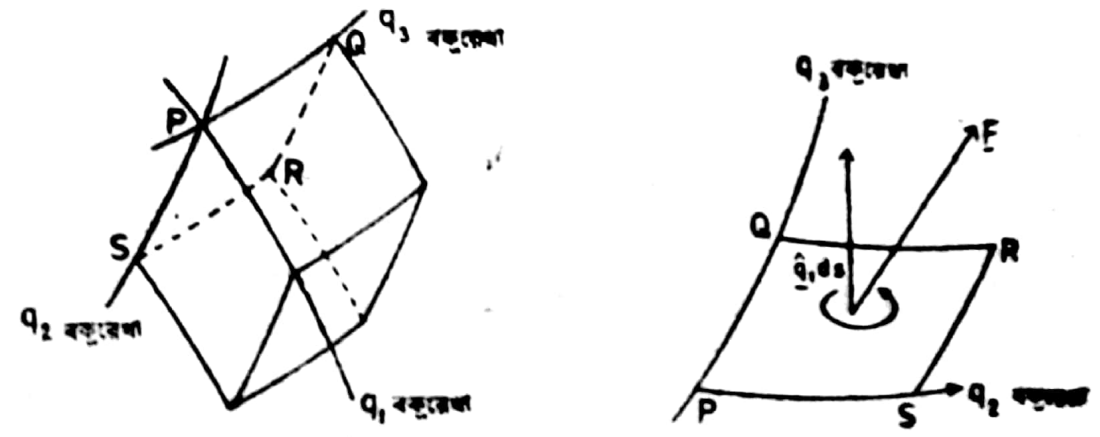
$$= \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1} h_1 dq_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2} h_2 dq_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3} h_3 dq_3$$

অতএব আমরা লিখতে পারি

$$\underline{\nabla}\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}\hat{\underline{q}}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}\hat{\underline{q}}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3}\hat{\underline{q}}_3$$

কেননা তাহলে $\underline{\nabla}\phi$ এবং $d\underline{r}$-এর নিদিক গুণন $d\phi$ রাশি উৎপন্ন করবে।

বক্ররৈখিক স্থানাঙ্কে 'ডাইভারজেন্স কারক' গণনার জন্যে একটা ক্ষুদ্র ঘন আয়তন নেয়া যায় (চিত্র ১.১৪)। ঐ ঘন আয়তনের PQRS তল q_1 সদিক



চিত্র : ১.১৪

রাশির উপর লম্ব এবং এই তলের মধ্য দিয়ে $\underline{F}$ সদিক রাশির প্রবাহের হার হল

$$F_1\ h_2\ dq_2\ h_3\ dq_3$$

কেননা $PS = h_2\, dq_2$ এবং $PQ = h_3\, dq_3$। একইভাবে PQRS তলের ঠিক বিপরীত তলের মধ্য দিয়ে প্রবাহের হার গণনা করা যায় এবং এই দুটি তলের মধ্য দিয়ে বহির্মুখী প্রবাহের মোট হার হল,

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\ (F_1\ h_2\ dq_2\ h_3\ dq_3)\ dq_1$$

যেহেতু h_2 এবং h_3 এখন q_1, q_2, q_3 পরিবর্তী রাশির অপেক্ষক, তাই এই প্রবাহের হারকে লেখা যায়,

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\ (F_1\ h_2\ h_3)\ dq_1\ dq_2\ dq_3$$

এইভাবে সবগুলি তলের অবদান যোগ করে এবং ঘন আয়তন $dV = h_1\, dq_1\ h_2\, dq_2\ h_3\, dq_3$ দিয়ে ভাগ করে ডাইভারজেন্স পাওয়া যায়,

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{F} = \lim_{\nabla V\to 0} \frac{\iint_S \underline{F}\ .\ d\underline{S}}{\nabla V}$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(F_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(F_3 h_1 h_2)\right\}$$

একই পদ্ধতিতে $\underline{F}$ সদিক রাশির কার্ল গণনা করা যায়। উদাহরণস্বরূপ, PQRS পৃষ্ঠতলের পরিসীমার রৈখিক সমাকলন হল,

$$\int_S^R \underline{F}\ .\ d\underline{s} + \int_Q^P \underline{F}\ .\ d\underline{s} = (F_3 h_3 dq_3)_{SR} - (F_3\ h_3\ dq_3)_{PQ}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_2}\ (F_3\ h_3)\ dq_3\ dq_2$$

$$\int_R^Q \underline{F}\ .\ d\underline{s} + \int_P^S \underline{F}\ .\ d\underline{s} = -\ (F_2 h_2 dq_2)_{RQ} + (F_2 h_2 dq_2)_{PS}$$

$$= -\ \frac{\partial}{\partial q_3}\ (F_2\ h_2)\ dq_2\ dq_2$$

সুতরাং যোগ করে পাওয়া যায়,

$$\int_{PSRQ} \underline{F} \cdot d\underline{s} = (\underline{\nabla} \times \underline{F})_1 \; h_2 dq_2 \, h_3 dq_3$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial q_2}(F_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(F_2 h_2)\right] dq_2 \, dq_3$$

এভাবে $\underline{\nabla} \times \underline{F}$ সদিক রাশির প্রথম উপাংশ পাওয়া যায়। অন্য দুটি উপাংশ একইভাবে গণনা করা যায়। সুতরাং

$$\underline{\nabla} \times \underline{F} = \frac{\hat{q}_1}{h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_2}(F_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(F_2 h_2)\right\}$$

$$+ \frac{\hat{q}_2}{h_3 h_1}\left\{\frac{\partial}{\partial q_3}(F_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(F_3 h_3)\right\}$$

$$+ \frac{\hat{q}_3}{h_1 h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(F_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(F_1 h_1)\right\}$$

সবশেষে লাপ্লাসিয়ান কারকের প্রকাশ দেয়া যায়,

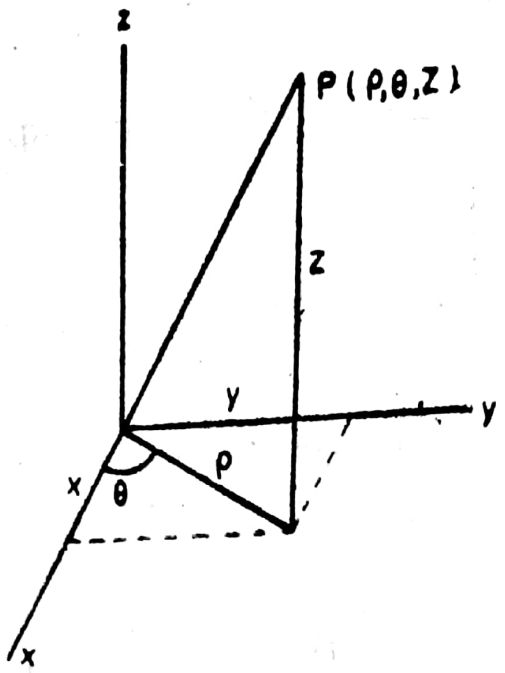
$$\nabla^2 \varphi = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla}\varphi) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial \varphi}{\partial q_3}\right)\right.$$

পদার্থবিজ্ঞানে কার্টেশীয় স্থানাঙ্ক ছাড়া আর যে দুটি স্থানাঙ্ক বহুলব্যবহৃত তা হল বেলনাকৃতি স্থানাঙ্ক এবং বর্তুলাকার স্থানাঙ্ক।

(ক) বেলনাকৃতি স্থানাঙ্ক : এই স্থানাঙ্কে যে কোন বিন্দুর অবস্থান ρ, θ, z দিয়ে প্রকাশ করা হয় যার সঙ্গে কার্টেশীয় স্থানাঙ্কের সংযোগ হল,

$$x = \rho \cos\theta \qquad y = \rho \sin\theta \qquad z$$



চিত্র : ১.১৫

সুতরাং এক্ষেত্রে ক্ষুদ্রতম চাপের দৈর্ঘ্য হল,

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(d\rho)^2 + \rho^2 d\theta^2 + z^2}$$

অর্থাৎ $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$ এবং $h_3 = 1$। অতএব বেলনাকৃতি স্থানাঙ্কে

$$\underline{\nabla}\varphi = \hat{\underline{\rho}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \hat{\underline{\theta}}\,\frac{\partial\varphi}{\rho\partial\theta} + \hat{\underline{z}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

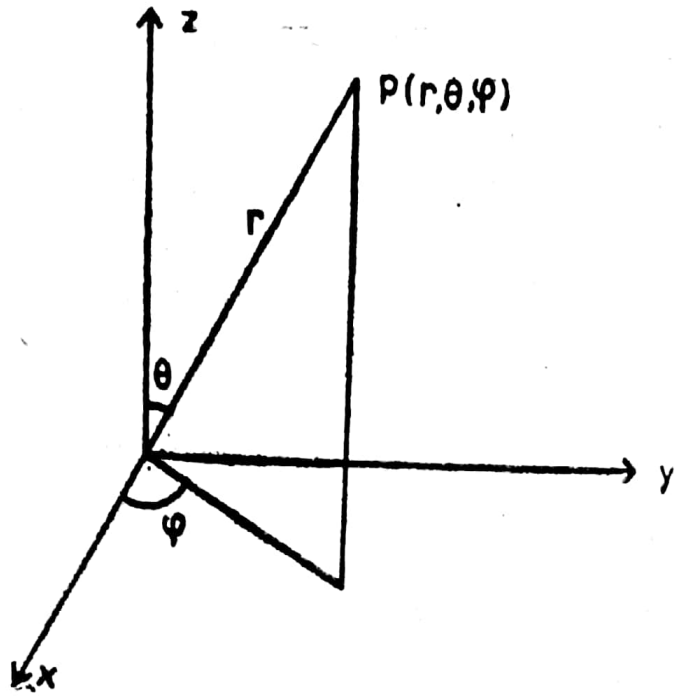
$$\underline{\nabla}.\underline{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}F_z$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{F} = \hat{\underline{\rho}}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right) + \hat{\underline{\theta}}\left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right) + \hat{\underline{z}}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}(\rho F_\theta) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\rho}{\partial\theta}\right)$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

(খ) বর্তুলাকার স্থানাঙ্ক : এই স্থানাঙ্কে যে কোন বিন্দুর অবস্থান r, θ, φ দিয়ে প্রকাশ করা হয় যার সঙ্গে কার্টেশীয় স্থানাঙ্কের সম্পর্ক হল,

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta$$



চিত্র : ১.১৬

সুতরাং ক্ষুদ্রতম চাপের দৈর্ঘ্য হল

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \; d\varphi^2}$$

অর্থাৎ $h_1 = 1, \quad h_2 = r$ এবং $h_3 = r\sin\theta$ । অতএব

$$\underline{\nabla}\Psi = \hat{\underline{r}} \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \hat{\underline{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} + \hat{\underline{\varphi}} \frac{\partial\Psi}{r\sin\theta\partial\varphi}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{F} = \hat{\underline{r}} \frac{1}{\sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi} \right)$$

$$+ \hat{\underline{\theta}} \frac{1}{r\sin\theta} \left(\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}(r F_\varphi) \right)$$

$$+ \hat{\underline{\varphi}} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r F_\theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} \right)$$

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)$$

$$+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}$$

সবশেষে সদিক রাশির কতগুলি অভেদ নিচে দেয়া হল,

$$\underline{A}\cdot(\underline{B}\times\underline{C}) = \underline{B}\cdot(\underline{C}\times\underline{A}) = \underline{C}\cdot(\underline{A}\times\underline{B})$$

$$\underline{A}\times(\underline{B}\times\underline{C}) = \underline{A}\cdot\underline{C}\ \underline{B} - \underline{A}\cdot\underline{B}\cdot\underline{C}$$

$$(\underline{A}\times\underline{B})\cdot(\underline{C}\times\underline{D}) = \underline{A}\cdot\underline{C}\ \underline{B}\cdot\underline{D} - \underline{A}\cdot\underline{D}\ \ \underline{B}\cdot\underline{C}$$

$$(\underline{A}\times\underline{B})\times(\underline{C}\times\underline{D}) = (\underline{A}\times\underline{B})\cdot\underline{D}\ \underline{C} - (\underline{A}\times\underline{B})\cdot\underline{C}\ \underline{D}$$

$$\underline{A}\times(\underline{B}\times\underline{C}) + \underline{B}\times(\underline{C}\times\underline{A}) + \underline{C}\times(\underline{A}\times\underline{B}) = 0$$

$$\underline{A}\times[\underline{B}\times(\underline{C}\times\underline{D})] = \underline{B}\cdot\underline{D}\ \underline{A}\times\underline{C} - \underline{B}\cdot\underline{C}\ \underline{A}\times\underline{D}$$

$$\underline{\nabla}(\varphi\Psi) = \varphi\,\underline{\nabla}\Psi + \Psi\,\underline{\nabla}\varphi$$

$$\underline{\nabla}\cdot(\varphi\,\underline{A}) = (\underline{\nabla}\varphi)\cdot\underline{A} + \varphi\,\underline{\nabla}\cdot\underline{A}$$

$$\underline{\nabla}\times(\varphi\,\underline{A}) = (\underline{\nabla}\varphi)\times\underline{A} + \varphi\,\underline{\nabla}\times\underline{A}$$

$$\underline{\nabla}(\underline{A}\cdot\underline{B}) = (\underline{A}\cdot\underline{\nabla})\,\mathbf{B} + (\underline{B}\cdot\underline{\nabla})\,\underline{A} + \underline{A}\times(\underline{\nabla}\times\underline{B}) + \underline{B}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A})$$

$$\underline{\nabla}\cdot(\underline{A}\times\underline{B}) = \underline{B}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{A}) - \underline{A}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{B})$$

$$\underline{\nabla}\times(\underline{A}\times\underline{B}) = \underline{A}\,\underline{\nabla}\cdot\underline{B} - \underline{B}\,\underline{\nabla}\cdot\underline{A} + (\underline{B}\cdot\underline{\nabla})\,\underline{A} - (\underline{A}\cdot\underline{\nabla})\,\mathbf{B}$$

$$\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\varphi) = 0$$

$$\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{F}) = 0$$

উদাহরণ—১।

একটি সদিক রাশির মান ধ্রুব কিন্তু তার দিক সময়ের সঙ্গে পরিবর্তনশীল। দেখাও যে তার অন্তরকলন সব সময়েই তার উপর লম্ব।

উত্তর : ধরা যাক $\underline{v}\,(t)$ একটি সময়ের উপর নির্ভরশীল সদিক রাশি। প্রশ্নানুসারে,

$$\underline{v}\cdot\underline{v} = |\underline{v}|^2 = \text{ধ্রুব}$$

সুতরাং ব্যাসকলন করে,

$$\frac{d}{dt}(\underline{v}\cdot\underline{v}) = 0$$

অতএব

$$\underline{v}\cdot\frac{d\underline{v}}{dt} = 0$$

উদাহরণ—২। একটি বস্তুকণা বৃত্তাকার হেলিক্সে ঘোরে যাতে যে কোন সময় t তে তার অক্ষাংশ হল $(a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ a\theta\tan\alpha)$ যেখানে a এবং α ধ্রুবরাশি $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$। $t=0$ সময়ে গতিবেগ শূন্য এবং $t=T$ সময়ে V। বস্তুকণা (a, o, o) বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করে এবং যে দিকে θ বৃদ্ধি পায় সেদিকে গতিশীল। যে কোন সময়ে $t<T$, ত্বরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : যেহেতু t সময়ে, অবস্থান সদিক রাশি হল,

$$\underline{r} = \underline{\hat{i}}\, a\cos\theta + \underline{\hat{j}}\, a\sin\theta + \underline{\hat{k}}\ \theta\tan\alpha$$

তাই গতিবেগ,

$$\dot{\underline{r}} = \frac{d\underline{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = a\dot{\theta}(-\sin\theta\ \underline{\hat{i}} + \underline{\hat{j}}\cos\theta + \underline{\hat{k}}\tan\alpha)$$

যার মান হল

$$|\dot{\underline{r}}| = a\dot{\theta}\sqrt{1+\tan^2\alpha} = \alpha\sec\alpha\,\dot{\theta}$$

গতিবেগের একক সদিক রাশি $\underline{\hat{v}}$ হলে,

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = v\,\underline{\hat{v}}$$

$$\underline{\hat{v}} = \frac{\dot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}|} = \frac{a\dot{\theta}(-\sin\theta\ \underline{\hat{i}} + \underline{\hat{j}}\cos\theta + \underline{\hat{k}}\tan\theta)}{a\sec\alpha\,\dot{\theta}}$$

$$= -\underline{\hat{i}}\sin\theta\cos\alpha + \underline{\hat{j}}\cos\theta\cos\alpha + \underline{\hat{k}}\sin\alpha$$

যেহেতু T সময়ে গতিবেগ V, তাই t সময়ে গতিবেগ $\frac{Vt}{T}\underline{\hat{v}}$।

সুতরাং

$$\frac{Vt}{T} = a\dot{\theta}\sec\alpha$$

এই সমীকরণ থেকে,

$$\theta = \frac{Vt^2\cos\alpha}{2Ta}$$

এবং

$$\frac{d\hat{\underline{v}}}{dr} = \frac{d\hat{\underline{v}}}{d\theta}\frac{d\theta}{dr} = (-\cos\theta\cos\alpha\,\hat{\underline{i}} - \sin\theta\cos\alpha\,\hat{\underline{j}})\frac{d\theta}{dr}$$

$$= (-\cos\theta\cos\alpha\,\hat{\underline{i}} - \sin\theta\cos\alpha\,\hat{\underline{j}})\frac{\dot{\theta}}{a\dot{\theta}\sec\alpha}$$

$$= \frac{-1}{a}(\hat{\underline{i}}\cos\theta + \hat{\underline{j}}\sin\theta)\cos^2\alpha$$

এখন ত্বরণ হল

$$\underline{f} = \frac{d\hat{\underline{v}}}{dt} = v\frac{d\hat{\underline{v}}}{dt} + \dot{\underline{v}}\,\hat{\underline{v}}$$

কিন্তু

$$\frac{d\hat{\underline{v}}}{dt} = \frac{d\hat{\underline{v}}}{dr}v$$

সুতরাং

$$\underline{f} = \dot{\hat{v}}\hat{\underline{v}} + k\,v^2\,\hat{\underline{n}}$$

যেখানে

$$k = \frac{\cos^2\alpha}{a}$$

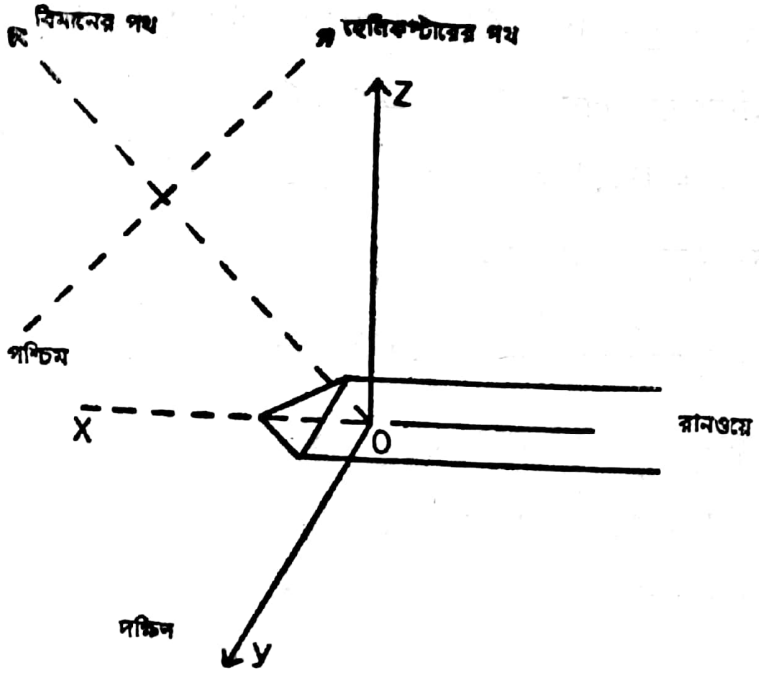
এবং

$$\hat{\underline{n}} = -(\underline{i}\cos\theta + \underline{j}\cos\theta)$$

সুতরাং স্পর্শকের দিকে বস্তুকণার ত্বরণ V/T এবং বৃত্তের লম্বের দিকে $kv^2 = V^2 t^2 \cos^2\alpha / a T^2$।

উদাহরণ--৩। একটি বিমানবন্দরের রানওয়ে পশ্চিমমুখী। একটি হেলিকপ্টার ২ কিলোমিটার উঁচুতে প্রতি ঘন্টায় ৩৬০ কিলোমিটার গতিবেগে উত্তর দিকে যায়। তার যাত্রাপথ রানওয়ের ঠিক ১ মাইল পশ্চিমে। কোন সময়ে রানওয়ের শেষ প্রান্ত থেকে হেলিকপ্টারটিকে সমতলীয়ভাবে $2\sqrt{2}$ কিলোমিটার দক্ষিণ-পশ্চিমে যেতে দেখা গেল। ঠিক একই সময়ে একটি বিমান রানওয়ে থেকে 45^0 ডিগ্রি কোণ করে প্রতি ঘন্টায় ৪৮০ মাইল বেগে আকাশে ওঠে। দেখাও যে হেলিকপ্টার এবং বিমানের সংঘর্ষ হওয়ার সম্ভাবনা আছে।

উত্তর



চিত্র : ১.১৭

ধরা যাক $\underline{V}_H$ এবং $\underline{V}_A$ হেলিকপ্টার এবং বিমানের গতিবেগ।

সুতরাং

$$\underline{V}_H = \dot{\underline{r}}_H = -360\,\hat{\underline{j}}$$

$$\underline{V}_A = \dot{\underline{r}}_A = 480\,(\underline{i}\cos 45^\circ + \underline{k}\cos 45^\circ)$$
$$= 240\sqrt{2}\,(\hat{\underline{i}} + \hat{\underline{k}})$$

সমাকলন করে,

$$\underline{r}_H = -360\,t\,\hat{\underline{j}} + \hat{\underline{\alpha}}$$

$$\underline{r}_A = 240\sqrt{2}\,t\,(\hat{\underline{i}} + \hat{\underline{k}}) + \underline{\beta}$$

যেখানে $\underline{\alpha}$ এবং $\underline{\beta}$ ধ্রুব সদিক রাশি। প্রাথমিক সময়ে হেলিকপ্টারের অবস্থান সদিক রাশি $2(\hat{\underline{i}} + \hat{\underline{j}} + \hat{\underline{k}})$ এবং বিমানের অবস্থান শূন্যবিন্দুতে।

সুতরাং $\underline{\alpha} = 2(\hat{\underline{i}} + \hat{\underline{j}} + \hat{\underline{k}})$ এবং $\beta = 0$।

অতএব $\underline{r}_H = 2\hat{\underline{i}} + 2(1-180t)\,\hat{\underline{j}} + 2\hat{\underline{k}}$

$$\underline{r}_A = 240\sqrt{2}\,t\,(\hat{\underline{i}} + \hat{\underline{k}})$$

উভয়ের দূরত্ব হল D, যেখানে

$$D^2 = |\underline{r}_A - \underline{r}_H|^2 = 4\left(90{,}000\,t^2 - 120\left(4\sqrt{2}+3\right)t + 3\right)$$

এই দূরত্ব সর্বনিম্ন হয় যখন $dD/dt = 0$ অর্থাৎ

$$0 = 180{,}000\,t - 120\left(4\sqrt{2}+3\right)$$

সুতরাং সর্বনিম্ন দূরত্বের সময় হল

$$t = \frac{4\sqrt{3}+3}{150} = 0.0057 \text{ ঘন্টা}$$

এই সময়ে সর্বনিম্ন দূরত্ব উপরের D-এর সমীকরণ থেকে,

$$D = 0.08 \text{ কি.মি.} = 80 \text{ মিটার}$$

অতএব বিমান ও হেলিকপ্টারের মধ্যে সংঘর্ষ হওয়ার সম্ভাবনা রয়েছে।

প্রশ্নমালা

১। প্রমাণ কর,

(ক) $\underline{\nabla}(f\varphi) = f\underline{\nabla}\varphi + \varphi\underline{\nabla}f$

(খ) $\underline{\nabla} \times (f\underline{A}) = f\underline{\nabla} \times \underline{A} + (\underline{\nabla} f) \times \underline{A}$

(গ) $\underline{\nabla}.(\underline{u} \times \underline{v}) = \underline{v}.(\underline{\nabla} \times \underline{u}) - \underline{u}.(\underline{\nabla} \times \underline{v})$

২। নিচের সমাকলনগুলির $x^2 + y^2 = 1$ বৃত্তের পরিসীমায় মান নির্ধারণ কর,

(ক) $\oint \underline{F}.d\underline{s}$ যেখানে $\underline{F} = \underline{i}\left(2y^2 - 3x^2y\right) + \underline{j}\left(4xy - x^3\right)$

(খ) $\oint \left(2x^2 - y^3\right)dx + \left(x^3 + y^3\right)dy$

৩। নিচের সমাকলনের মান নির্ণয় কর,

(ক) $\iint_S \underline{F}.d\underline{S}$

যেখানে $\underline{F} = \hat{\underline{i}}\,x^3 + \hat{\underline{j}}\,y^3 + \hat{\underline{k}}\,z^3$

এবং S মূলবিন্দুর চারপাশে R ব্যাসার্ধের একটি গোলক।

(খ) $\iint_S x\,dy\,dz + y\,dzdx + z\,dxdy$

(গ) $\oint_C \underline{u}.d\underline{s}$

যেখানে $\underline{u} = -3y\,\hat{\underline{i}} + 3x\,\hat{\underline{j}} + \hat{\underline{k}}$

এবং C হল $z = 2$ তলে অবস্থিত একটি বৃত্ত $x^2 + y^2 = 1$।

৪। প্রমাণ কর যে যদি G বিন্দু AB সরলরেখাকে m_1 / m_2 অনুপাতে বিভক্ত করে তবে G বিন্দুর অবস্থান সদিক রাশি হল

$$\underline{r}_G = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2}$$

যেখানে $\underline{r}_1$ এবং $\underline{r}_2$ হল A ও B বিন্দুর অবস্থান সদিক রাশি।

৫। প্রমাণ কর,

(ক) $\underline{\nabla}.\underline{r} = 3$

(খ) $\underline{\nabla} \times \underline{r} = 0$

এমন একটি নির্দিক অপেক্ষক $\varphi\,(x, y, z)$ নির্ধারণ কর যেন

$$\underline{r} = \underline{\nabla}\varphi$$

৬। একটি অজ্ঞাত সদিক রাশি $\underline{X}$ দুটি জ্ঞাত সদিক রাশি $\underline{A}$ এবং $\underline{B}$ এবং একটি নির্দিক অপেক্ষক φ এর সঙ্গে নিম্নলিখিত সম্পর্ক সার্থক করে,

$$\underline{A} \times \underline{Y} = \underline{B} \qquad \underline{A}.\underline{Y} = \varphi$$

$\underline{Y}$ সদিক রাশিকে $\underline{A}$, $\underline{B}$ এবং φ দিয়ে প্রকাশ কর।

দ্বিতীয় অধ্যায়

নিউটনীয় গতিসূত্র

নিউটনের গতিসূত্র চিরায়ত পদার্থবিজ্ঞানের মূল ভিত্তি। একবার এক বন্ধু তাঁকে জিজ্ঞাসা করেছিলেন, 'আপনার আবিষ্কারগুলি কেমন করে করেছিলেন?' নিউটন উত্তর দিয়েছিলেন, 'সব সময়ে সেগুলি সম্বন্ধে চিন্তা করে।' তাঁর বিখ্যাত গ্রন্থ, 'দ্য ম্যাথেমেটিকাল প্রিন্সিপ্‌ল্‌স্‌ অব ন্যাচুরাল ফিলজফি' প্রকাশিত হয়েছিল ১৬৮৭ সালে। শোনা যায় এটি তিনি সতের-আঠার মাসে লিখে শেষ করেছিলেন। সংক্ষেপে এই গ্রন্থটিকে 'প্রিন্সিপিয়া' বলে। এর মধ্যেই অন্তর্ভুক্ত হয়েছিল গতি-সংক্রান্ত নিউটনের তিনটি আইন এবং চিরায়ত পদার্থবিজ্ঞানের অন্যান্য মৌলিক ধারণা। সঙ্গত কারণেই প্রিন্সিপিয়া গ্রন্থটিকে সভ্যতার অন্যতম শ্রেষ্ঠ অবদান বলা হয়ে থাকে।

২.১ নিউটনের গতিসূত্র এবং সংরক্ষণের আইন

প্রিন্সিপিয়া গ্রন্থে যেসব ধারণা সর্বপ্রথম পরিষ্কারভাবে বিবৃত করা হয় তার মধ্যে আছে ভর, ভরবেগ এবং শক্তির ধারণা। কোন বস্তুতে যে পরিমাণ পদার্থ আছে তাই হল তার ভর। লক্ষ্য করার ব্যাপার যে পদার্থের গঠন সম্বন্ধে নিউটন কিছু বলেন নি। তিনি স্বতঃসিদ্ধ হিসেবে এটা ধরে নিলেন যে সব বস্তুতেই পদার্থ আছে এবং সেই পদার্থের পরিমাণ হল তার ভর। সুতরাং

$$\text{বস্তুর অন্তর্ভুক্ত পদার্থ} = \text{বস্তুর ভর} \qquad (২.১)$$

বস্তু গতিহীন থাকতে পারে অথবা তা গতিশীল হতে পারে। যদি বস্তু গতিশীল হয়, তবে সময়ের সঙ্গে তার অবস্থানের পরিবর্তন হবে। সরলরেখায় অবস্থানের পরিবর্তনকে বলা হয় রৈখিক সরণ। এই সরণের হার হল রৈখিক গতিবেগ বা বেগ:

$$\text{বেগ} = \text{সরণের হার}$$

অন্তরকলন পদ্ধতিতে লেখা যায়,

$$\underline{v} = \frac{d\underline{x}}{dt} \qquad (২.২)$$

যেখানে $\underline{v}$ হল গতিবেগ এবং $\underline{x}$ হল রৈখিক সরণ। উভয়ই সদিক বা ভেক্টর রাশি। গতিবেগ $\underline{v}$ যদি ধ্রুব হয় তবে তাকে বলা হবে সুষম গতিবেগ। বস্তুর ভর এবং গতিবেগের গুণফলকেই বলে তার রৈখিক ভরবেগ।

$$\text{সুতরাং রৈখিক ভরবেগ} = \text{ভর} \times \text{রৈখিক গতিবেগ}$$

বা
$$\underline{p} = m\underline{v} \qquad (২.৩)$$

যেখানে $\underline{p}$ হল বস্তুর রৈখিক ভরবেগ।

বস্তুর ভর, তার গতিবেগ এবং ভরবেগের সংজ্ঞা দিয়েই নিউটন ক্ষান্ত হলেন না। এরপর তিনি এই তিনটি সংজ্ঞার উপর ভিত্তি করে বস্তুর গতি সম্বন্ধে তিনটি মৌলিক আইন উপস্থাপিত করলেন। আইন তিনটি হল:

(১) কোন বস্তু স্থির অবস্থায় অথবা সুষম গতিবেগসম্পন্ন অবস্থায় অব্যাহত-ভাবেই থাকতে পারে যতক্ষণ পর্যন্ত না তার উপর কোন বহিঃস্থ আরোপিত বল তাকে তার অবস্থা পরিবর্তন করতে বাধ্য করে।

(২) যদি কোন বল বস্তুর উপর সক্রিয় হয় তাহলে তার রৈখিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার তার উপর আরোপিত বলের সমান হবে।

(৩) কোন বস্তুর উপর কোন বল প্রয়োগ করলে, বস্তুর প্রতিক্রিয়া বলও সমপরিমাণের হয়। অর্থাৎ যখন দুটি বস্তু পরস্পরের উপর ক্রিয়া করে তখন প্রথম বস্তু দ্বিতীয় বস্তুর উপর যে বল প্রয়োগ করে, দ্বিতীয় বস্তুও প্রথম বস্তুর উপর সেই একই পরিমাণের কিন্তু বিপরীত দিকে বল প্রয়োগ করে। ক্রিয়া বল ও প্রতিক্রিয়া বল একই সরলরেখায় ক্রিয়াশীল।

নিউটনের প্রথম গতিসংক্রান্ত সূত্রের মাধ্যমে বলের সংজ্ঞা দেয়া হল। বস্তুর নিশ্চল অবস্থা বা 'সুষম গতিসম্পন্ন অবস্থা'কে পরিবর্তন করে যে 'আরোপিত প্রভাব' তাকেই বলা হয়েছে বল। সুতরাং গতিবেগ $\underline{v}$ যদি শূন্য অথবা ধ্রুব হয় তবে বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল $\underline{F}$ বল হবে শূন্য। অর্থাৎ

$$\underline{F} = 0 \quad \text{যখন } \underline{v} = 0 \quad \text{অথবা ধ্রুব} \qquad (২.৪)$$

নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র দিয়ে এই বলের পরিমাপ দেয়া হয়েছে। বলা হয়েছে যে আরোপিত বলের পরিমাপ ভরবেগের পরিবর্তনের হারের সমান। অতএব

$$\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt} \qquad (২.৫)$$

$$= \frac{d}{dt}(m\underline{v})$$

বস্তুর ভর যদি ধ্রুব হয় তবে আমরা লিখতে পারি,

$$\underline{F} = m\frac{d\underline{v}}{dt} = m\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} \qquad (২.৬)$$

গতিবেগের পরিবর্তনের হারকে বলে ত্বরণ। সুতরাং আমরা লিখতে পারি,

$$\text{বল} = \text{ভর} \times \text{ত্বরণ}$$

এবং এটাই হল নিউটনের গতি-সমীকরণ। নিউটনের গতিসংক্রান্ত তৃতীয় আইনটি এভাবে প্রকাশ করা যায়,

$$\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21} \qquad (২.৭)$$

অর্থাৎ প্রথম বস্তু দ্বিতীয় বস্তুর উপর যে বল প্রয়োগ করে তা দ্বিতীয় বস্তুর প্রথম বস্তুর উপর প্রতিক্রিয়ার সমান এবং বিপরীতমুখী।

লক্ষ্য করা দরকার যে সমীকরণ (২.৫) অনুসারে যদি বল শূন্য হয় অর্থাৎ $\underline{F} = 0$, তাহলে রৈখিক ভরবেগ $\underline{p}$ হবে ধ্রুব। সুতরাং চিরায়ত পদার্থবিজ্ঞানে রৈখিক ভরবেগ একটি সংরক্ষিত বা নিত্য রাশি। এটাই আমাদের প্রথম সংরক্ষণের আইন। বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল লব্ধি বল শূন্য হলে গতিবেগ সব সময়ই এমন হবে যাতে তার ভরবেগ সময়ের পরিপ্রেক্ষিতে ধ্রুব রাশি থাকে।

সরলরেখায় বস্তুর সরণের ক্ষেত্রে রৈখিক ভরবেগের সংজ্ঞা দেয়া হয়েছে। এছাড়াও বস্তুর কৌণিক ভরবেগের সংজ্ঞা দেয়া যায়। ধরা যাক একটি m ভর-সম্পন্ন বস্তু O বিন্দু থেকে $\underline{r}$ দূরত্বে অবস্থিত এবং বস্তুটি O বিন্দুর চারদিকে ঘুরছে। এক্ষেত্রে আমরা O বিন্দুর সাপেক্ষে ভরবেগের মোমেন্ট বা ভ্রামক নিতে পারি। এভাবেই পাওয়া যায় কৌণিক ভরবেগ $\underline{L}$,

$$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} \qquad (২.৮)$$

একইভাবে O বিন্দুর সাপেক্ষে বলের মোমেন্ট নিলে আমরা পাই ব্যাবর্তন বল (টর্ক)। অর্থাৎ ব্যাবর্তন বল হল,

$$\underline{N} = \underline{r} \times \underline{F} \qquad (২.৯)$$

সুতরাং

$$\underline{N} = \underline{r} \times \frac{d\underline{p}}{dt}$$

(২.৮) সমীকরণকে অন্তরকলন করে লেখা যায়,

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = \underline{v} \times \underline{p} + \underline{r} \times \frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{r} \times \frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{N} \qquad (২.১০)$$

কেননা $\underline{v} \times \underline{p} = m\,\underline{v} \times \underline{v} = 0$। সুতরাং বস্তুর উপর ব্যাবর্তন বল হল তার কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার। ব্যাবর্তন বল $\underline{N}$ যদি শূন্য হয় তাহলে ২.১০ সমীকরণ অনুসারে কৌণিক ভরবেগ $\underline{L}$ ধ্রুব রাশি। এটাই হল কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণের আইন। অর্থাৎ বস্তুর উপর কোন ব্যাবর্তন বল আরোপ না করা হলে, তার কৌণিক ভরবেগ সবসময়ে একই থাকে।

কোন বস্তুকে এক জায়গা থেকে আরেক জায়গায় সরিয়ে নিতে আরোপিত বল $\underline{F}$ যে কাজ করে তার পরিমাণ হল,

$$W_{12} = \oint_1^2 \underline{F} \cdot d\underline{x} \qquad (২.১১)$$

সুতরাং ২.২ সমীকরণ ব্যবহার করে লেখা যায়,

$$W_{12} = \oint_1^2 \left(\frac{d\underline{p}}{dt}\right).\left(\frac{d\underline{x}}{dt}\right) dt$$

$$= \frac{1}{m} \oint_1^2 (\dot{\underline{p}} \cdot \underline{p})\, dt$$

$$= \frac{1}{2m} \left(\underline{p}_2^{\,2} - \underline{p}_1^{\,2}\right) \qquad (২.১২)$$

কেননা $\quad d\underline{p}^2 / dt = 2\underline{p} \cdot \dot{\underline{p}}$।

বস্তুর গতিশক্তির সংজ্ঞা হল

$$T = \frac{p^2}{2m} \qquad (২.১৩)$$

সুতরাং বস্তুর উপর আরোপিত বলের কাজের পরিমাণ তার দুই অবস্থানের গতি-শক্তির পার্থক্যের সমান:

$$W_{12} = T_2 - T_1 \qquad (২.১৪)$$

কোন বলকে নিত্য বা 'রক্ষণশীল' বলা হয় যদি তা সংরক্ষণের আইন মেনে চলে। অর্থাৎ কোন বস্তুর উপর কাজের পরিমাণ যদি বস্তুর সরণের বিশেষ পথটির উপর নির্ভর না করে তবেই আরোপিত বলকে 'রক্ষণশীল' বল বলা হয়। চূড়ান্ত বিন্দুতে বস্তুকে যে পথেই নিয়ে আসা হোক না কেন কাজের পরিমাণ হবে একই। সেক্ষেত্রে একটি বস্তুকে ১নং বিন্দু থেকে ২ নং বিন্দুতে নিয়ে এসে আবার যদি ১নং বিন্দুতে ফিরিয়ে আনা যায় তবে মোট কাজের পরিমাণ হবে শূন্য। সুতরাং একটি চক্রাকার পথের উপর কাজের পরিমাণ লেখা যায়,

$$\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{x} = 0 \qquad (২.১৫)$$

যেখানে C একটি চক্রাকার সরণ-পথ। এখন সদিক অন্তরকলনের স্টোক্‌স্ উপপাদ্য ব্যবহার করে আমরা লিখতে পারি,

$$\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{x} = \int_S (\text{curl } \underline{F}) \cdot \hat{\underline{n}}\, dS$$

যেখানে S হল C বর্তনীর অন্তর্ভুক্ত ক্ষেত্রফল এবং $\underline{n}$ হল ঐ তলের উপর বহির্মুখী লম্ব। সুতরাং রক্ষণশীল বলের ক্ষেত্রে ২.১৫ সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$\text{curl } \underline{F} = 0 \qquad (২.১৬)$$

সদিক অন্তরকলন তত্ত্ব থেকে আমরা আরো জানি যে নিম্নোক্ত অভেদ সব সময়েই সত্য,

$$\text{curl grad } V(\underline{r}) = 0$$

যেখানে $V(\underline{r})$ একটি নির্দিক অপেক্ষক। অতএব ২.১৬ সমীকরণ থেকে লেখা যায়,

$$\underline{F} = -\text{grad } V(\underline{r}) = -\underline{\nabla} V(r) \qquad (২.১৭)$$

এই নির্দিক রাশি $V(\underline{r})$ কে বলা হয় বিভব অপেক্ষক। সুতরাং রক্ষণশীল বলের ক্ষেত্রে আমরা সবসময়েই একটি নির্দিক রাশির প্রবর্তন করতে পারি যার

'ঋণাত্মক গ্রেডিয়েন্ট' হবে আরোপিত বল (সমীকরণ ২.১৭)। সেক্ষেত্রে লেখা যায় যে কাজের পরিমাণ

$$W_{12} = \int_1^2 \underline{F} \cdot d\underline{x} = -\int_1^2 \left(\underline{\nabla} V\right) \cdot d\underline{x}$$

$$= -\int_1^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i = -\int_1^2 dV$$

$$= V_1 - V_2 \qquad (২.১৮)$$

অর্থাৎ কাজের পরিমাণ হল বস্তুটির দুটি অবস্থানে বিভবশক্তির পার্থক্যের সমান। অতএব,

$$W_{12} = T_2 - T_1 = V_1 - V_2$$

অথবা

$$T_2 + V_2 = T_1 + V_1 \qquad (২.১৯)$$

সুতরাং গতিশক্তি এবং বিভবশক্তির যোগফল একটি ধ্রুবরাশি। এটাই হল শক্তি সংরক্ষণের আইন। বস্তুর সামগ্রিক যান্ত্রিক শক্তি অর্থাৎ গতিশক্তি ও বিভবশক্তির সমষ্টি সবসময় একই থাকে।

এই তিনটি সংরক্ষণের আইন—শক্তি, রৈখিক ভরবেগ এবং কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণের আইন—পদার্থবিজ্ঞানের মূল স্তম্ভ। এরা অতি পবিত্র, পরম অলঙ্ঘনীয় আইন।

সংরক্ষণের মৌলিক আইন থেকেই বস্তুর গতি-প্রকৃতি নির্ধারণ করা সম্ভব। উদাহরণস্বরূপ, আমরা একটা একমাত্রিক বস্তুনিচয়ের (সিস্টেমের) কথা চিন্তা করতে পারি, যার গতিশক্তি হল $T = \underline{p}^2 / 2m$ এবং বিভবশক্তি হল $V(x)$। সুতরাং বস্তুটির সামগ্রিক শক্তি হল,

$$E = T + V = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

$$= \tfrac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)$$

যেহেতু সামগ্রিক শক্তি E একটি ধ্রুবরাশি, সুতরাং লেখা যায়

$$\dot{x} = \sqrt{2(E - V)/m}$$

এবং তাই সমাকলন পদ্ধতিতে আমরা পাই,

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} + \text{একটি ধ্রুব সংখ্যা} \quad (২.২০)$$

ধরা যাক বস্তুটির বিভবশক্তির পরিমাণ হল,

$$V(x) = \tfrac{1}{2} k x^2, \quad (২.২১)$$

যেখানে k একটি ধ্রুব সংখ্যা। এক্ষেত্রে ২.২০ সমীকরণ থেকে লেখা যায়,

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dx}{\sqrt{2E/k - x^2}} + \text{ধ্রুব সংখ্যা}$$

সমাকলন করে লেখা যায়,

$$t = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \frac{x - x_0}{\sqrt{2E/k}} + t_0$$

যেখানে $\omega = \sqrt{k/m}$ । সুতরাং

$$x = x_0 + \sqrt{\frac{2E}{m/\omega^2}} \sin \omega (t - t_0) \quad (২.২২)$$

স্পষ্টতঃই t_0 সময়ে বস্তুর অবস্থান হল x_0। তারপর যে কোন সময়ে তার গতি-পথ একটি সাইন রেখা-চিত্র দিয়ে দেখানো যায়। সুতরাং বিভবশক্তি যদি সরণের বর্গের সমানুপাতিক হয় (২.২১ সমীকরণ) অর্থাৎ আরোপিত বল যদি সরণের সমানুপাতিক এবং তার বিপরীতমুখী হয় ($F = -kx$) তাহলে বস্তুটি সরল ছন্দিত স্পন্দকের গতিসম্পন্ন হয়, যার স্পন্দনসংখ্যা হল $\omega = \sqrt{k/m}$।

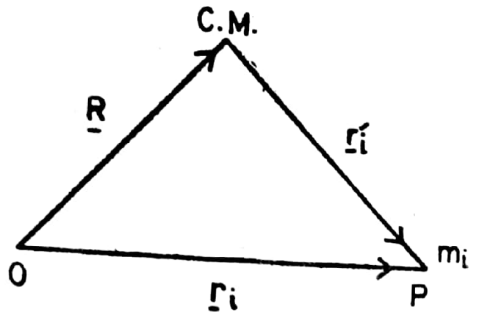
২.২ বস্তুকণানিচয়ের সংরক্ষণ উপপাদ্য

আমরা N সংখ্যক বস্তুকণার একটি বস্তুনিচয় (সিস্টেম) নিয়ে আলোচনা করতে পারি। সেগুলি খুব দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ কণাসমষ্টি হতে পারে অথবা কঠিন

বস্তুও হতে পারে যার মধ্যে বিভিন্ন বস্তুকণা তাদের পারস্পরিক আপেক্ষিক দূরত্ব সবসময় বজায় রাখে। বস্তুনিচয়ের ভর হল,

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

আমরা i-বস্তুকণার অবস্থান $\underline{r}_i$ সদিক রাশি দিয়ে নির্দেশ করি।



চিত্র : ১.১৮

মূলবিন্দু হল O। বস্তুনিচয়ের ভরকেন্দ্রের অবস্থান যদি $\underline{R}$ হয়, তবে সংজ্ঞানুসারে,

$$M\underline{R} = \sum_i m_i \underline{r'}_i$$

ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে i বস্তুকণার অবস্থান হল $\underline{r'}_i$। সুতরাং

$$\underline{r}_i = \underline{R} + \underline{r'}_i$$

বস্তুনিচয়ের i-বস্তুকণার উপর যে বল সক্রিয় তাকে সাধারণভাবে দুভাগে ভাগ করা যায়। একটি অংশ হল বস্তুনিচয়ের বাইরে থেকে যেসব বল সক্রিয় তাদের সদিক যোগফল অর্থাৎ লব্ধি বহির্বল। এটাই হল বহিঃস্থ বল $\underline{F}_i^{(ext)}$। অন্য অংশ হল i বস্তুকণার সঙ্গে অন্য N−1 বস্তুকণার বিক্রিয়ার ফলে উদ্ভূত অন্তঃস্থ বল। এটাই হল অন্তঃস্থ বল $\underline{F}_i^{(int)}$।

এখন অন্তঃস্থ বল হল বিভিন্ন বস্তুকণার মধ্যে সক্রিয় সব অন্তঃস্থ প্রতিক্রিয়া বল $\underline{F}_{ij}$ এর সদিক যোগফল :

$$\underline{F}_i^{(int)} = \sum_j \underline{F}_{ij}$$

যেখানে $\underline{F}_{ij}$ হল i বস্তুকণার উপর j বস্তুকণার প্রতিক্রিয়া বল। নিউটনের তৃতীয় আইন অনুসারে,

$$\underline{F}_{ij} = -\underline{F}_{ji}$$

এবং নিউটনের দ্বিতীয় আইন থেকে i বস্তুকণার জন্য আমরা লিখতে পারি,

$$\dot{\underline{P}}_i = \underline{F}_i$$

সুতরাং,

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(m_i \ \underline{r}_i\right) = \underline{F}_i^{(ext)} + \sum_j \underline{F}_{ij}$$

সব i-এর উপর যোগ করে,

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_i m_i \ \underline{r}_i\right) = \sum_i \underline{F}_i^{(ext)} + \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \underline{F}_{ij}$$

কিন্তু আমরা সহজেই দেখি যে,

$$\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \underline{F}_{ij} = \sum_{i<j} \left(\underline{F}_{ij} + \underline{F}_{ij}\right) = O$$

সুতরাং

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(M\underline{R}\right) = \underline{F} \qquad \underline{F} = \sum_i \underline{F}_i^{(ext)}$$

যেখানে $\underline{F}$ হল সামগ্রিক বহিঃস্থ বল। অতএব বস্তুনিচয়ের ভরকেন্দ্র এমনভাবে গতিশীল যেন সব বস্তুকণা একটিমাত্র বস্তুকণায় পর্যবসিত যার ভর M এবং যার উপর সক্রিয় বহিঃস্থ বল $\underline{F}$। বস্তুনিচয়ের সামগ্রিক রৈখিক ভরবেগ হল,

$$\underline{P} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \ \underline{r}_i\right) = \frac{d}{dt}\left(M\underline{R}\right)$$

সুতরাং

$$\dot{\underline{P}} = \underline{F}$$

অতএব কোন বহিঃস্থ বল আরোপিত না হলে সামগ্রিক ভরবেগ $\underline{P}$ সংরক্ষিত হয়।

আবার i-বস্তুকণার কৌণিক ভরবেগ হল,

$$\underline{L}_i = \underline{r}_i \times \underline{p}_i$$

সব বস্তুকণার উপর যোগ করে আমরা সামগ্রিক কৌণিক ভরবেগ পাই,

$$\underline{L} = \sum_i (\underline{r}_i \times \underline{p}_i) = \Sigma m_i (\underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i)$$

$$= \sum_i m_i (\underline{R} + \underline{r'}_i) \times (\dot{\underline{R}} + \dot{\underline{r'}}_i)$$

$$= \sum_i m_i [\underline{R} \times \dot{\underline{R}} + \underline{R} \times \dot{\underline{r'}}_i + \underline{r'}_i \times \dot{\underline{R}} + \underline{r'}_i \times \dot{\underline{r'}}_i]$$

কিন্তু মাঝের দুটি রাশির যোগফল

$$\left(\sum_i m_i \, \underline{r'}_i \cdot \right) \times \dot{\underline{R}} + \underline{R} \times \frac{d}{dt} \left(\Sigma m_i \cdot \underline{r'}_i \right)$$

শূন্য কেননা

$$\sum_i m_i \, \underline{r'}_i = \sum_i m_i (\underline{r}_i - \underline{R}) = \Sigma m_i \, \underline{r}_i - M\underline{R} = M\underline{R} - M\underline{R} = 0$$

অতএব

$$\underline{L} = M\underline{R} \times \dot{\underline{R}} + \Sigma \underline{r'}_i \times \underline{p'}_i$$
$$= \underline{R} \times \underline{p} + \Sigma \underline{r'}_i \times \underline{p'}_i$$

এই সমীকরণের তাৎপর্য হল এই যে সামগ্রিক কৌণিক ভরবেগ $\underline{L}$ দুটি অংশের যোগফল; একটি অংশ হল ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে বস্তুনিচয়ের কৌণিক ভরবেগ অর্থাৎ ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে সকল বস্তুকণার কৌণিক ভরবেগের সমষ্টি এবং অন্যটি হল মূলবিন্দুর সাপেক্ষে ভরকেন্দ্রের কৌণিক ভরবেগ। সময়ের সাপেক্ষে অন্তরকলন করে লেখা যায়,

$$\dot{\underline{L}} = \sum_i \underline{r'}_i \times \dot{\underline{p'}}_i$$

$$= \sum_i \underline{r'}_i \times (\underline{F}_i^{ext} + \sum_j \underline{F}_{ij})$$

কিন্তু

$$\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \underline{r}'_i \times \underline{F}_{ij} = \sum_{i<j} [\, \underline{r}'_i \times \underline{F}_{ij} + \underline{r}'_j \times \underline{F}_{ji} \,]$$

$$= \sum_{i<j} (\, \underline{r}'_i - \underline{r}'_j \,) \times \underline{F}_{ij}$$

$$= \sum_{i<j} \underline{r}'_{ij} \times \underline{F}_{ij}$$

কেন্দ্রীয় বলের ক্ষেত্রে $\underline{F}_{ij}$ প্রতিক্রিয়া-বল সবসময়ে j এবং j বস্তুকণাদ্বয় সংযোগকারী সরলরেখা $\underline{r}_{ij}$ বরাবর সক্রিয়। সুতরাং উপরের সমীকরণের ডানদিকটি শূন্য। অতএব

$$\dot{\underline{L}} = \sum_i \underline{r}'_i \times \underline{F}_i^{(ext)} = \sum_i N_i^{(ext)} = \underline{N}$$

যেখানে $\underline{N}$ হল আরোপিত ব্যাবর্তন বল। এই সমীকরণ থেকে বলা যায় যে আরোপিত ব্যাবর্তন বল শূন্য হলে সামগ্রিক কৌণিক ভরবেগ সময় সাপেক্ষে ধ্রুব সংখ্যা।

এখন আমরা বস্তুনিচয়কে ১ অবস্থান থেকে ২ অবস্থানে সরিয়ে নিয়ে যেতে যে কাজের প্রয়োজন তা হিসাব করতে পারি। এই কাজ হল,

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \underline{F}_i \,.\, d\,\underline{x}_i$$

$$= \sum_i \frac{1}{m_i} \int_1^2 \dot{\underline{p}}_i . \underline{p}_i \, dt = \sum_i \frac{1}{2m_i} \left[\left(\underline{p}_i^2 \right)_2 - \left(\underline{p}_i^2 \right)_1 \right]$$

$$= T_2 - T_1$$

অর্থাৎ দুই অবস্থানের গতিশক্তির ব্যবধান হল কাজের পরিমাণ। এখানে গতিশক্তি হল

$$T = \sum_i \frac{\dot{p}_i^2}{2m_i} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \, \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_i m_i \, (\dot{\underline{R}} + \dot{\underline{r}}_i) . (\dot{\underline{R}} + \dot{\underline{r}}_i)$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_i m_i \, \dot{r}_i^{\,2} + \tfrac{1}{2} M V^2$$

যেখানে V হল ভরকেন্দ্রের গতিবেগ এবং $\dot{r}_i$ হল ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে i-কণিকার গতিবেগ। এখানে আমরা পূর্বের মত

$$\sum_i m_i \, \dot{\underline{r}}_i = 0$$

ব্যবহার করেছি। অতএব বস্তুনিচয়ের গতিশক্তিরও দুটি অংশ আছে; একটি অংশ হল একটি M ভরের বস্তুকণার গতিশক্তি যার গতিবেগ হল $\underline{V}$ এবং অন্যটি হল ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে সব বস্তুকণার গতিশক্তি। এখন কাজের রাশিকে এভাবেও লেখা যায়,

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \underline{F}_i^{(ext)} . \, d\underline{x}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \underline{F}_{ij} . \, d\underline{x}_i$$

রক্ষণশীল বলের ক্ষেত্রে আমরা বিভবশক্তি অপেক্ষকের সংজ্ঞা এভাবে দিতে পারি,

$$\underline{F}_i^{(ext)} = - \vec{\nabla}_i \, U_i$$

$$\underline{F}_{ij} = - \vec{\nabla}_i \, U_{ij}$$

যেখানে গ্রেডিয়েন্ট কারকে i সূচক দিয়ে বোঝান হয়েছে যে i বস্তুকণার স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে গ্রেডিয়েন্ট নেয়া প্রয়োজন। সুতরাং

$$\sum_i \int_1^2 \underline{F}_i^{(ext)} . \, d\underline{x}_i = - \sum_i \int_1^2 \left(\vec{\nabla}_i U_i \right) . \, d\underline{x}_i$$

$$= - \left[\left(\sum_i U_i \right)_2 - \left(\sum_i U_i \right)_1 \right]$$

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \underline{F}_{ij} \cdot d\underline{x}_i = \sum_{i<j} \int_1^2 \left[\underline{F}_{ij} \cdot d\underline{x}_i + \underline{F}_{ji} \cdot dx_j \right]$$

$$= \sum_{i<j} \int_1^2 \underline{F}_{ij} \cdot d\underline{r}_{ij} .$$

যেখানে $\underline{r}_{ij} = \underline{x}_i - \underline{x}_j$। কিন্তু U_{ij} নির্ভর করে $\underline{x}_i$ এবং $\underline{x}_j$ উভয়ের উপর।

সুতরাং

$$dU_{ij} = \left[\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_j} dx_j \right]$$

$$= \left(\vec{\nabla}_i U_{ij} \right) . d\underline{x}_i + \left(\vec{\nabla}_j U_{ij} \right) . d\underline{x}_j$$

$$= - \left(\underline{F}_{ij} . d\underline{x}_i + \underline{F}_{ji} . d\underline{x}_j \right)$$

$$= - F_{ij} . d\underline{r}_{ij}$$

অতএব,

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \underline{F}_{ij} . d\underline{x}_i = - \sum_{i<j} \int_1^2 dU_{ij} = - \left[\sum_{i<j} U_{ij} \right]_1^2$$

সমগ্র কাজের পরিমাণ

$$W_{12} = - [V]_1^2 = V_1 - V_2$$

যেখানে

$$V = \Sigma U_i + \sum_{i<j} U_{ij}$$

সুতরাং

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2$$

বা $$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

অর্থাৎ সামগ্রিক শক্তি $E = T + V$ সময়ের সাপেক্ষে ধ্রুবরাশি। যদি বস্তু নিচয়ের উপর আরোপিত বল বিভবশক্তি অপেক্ষকের মাধ্যমে নির্ধারণ করা যায় অর্থাৎ বল যদি সংরক্ষণশীল হয় তাহলেই সামগ্রিক শক্তি ধ্রুব। লক্ষ্য করা দরকার যে V এখানে সামগ্রিক বিভবশক্তি,

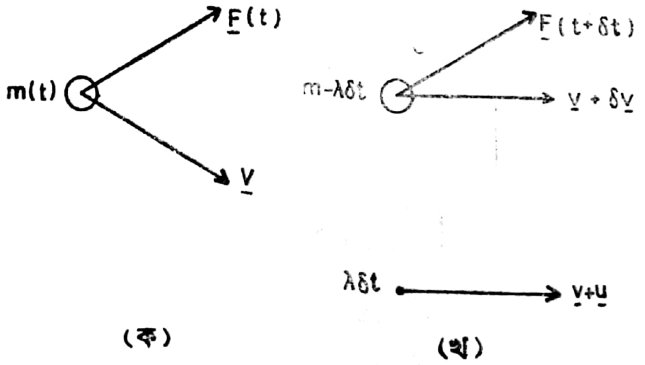
$$V = \sum_i U_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij}$$

কেননা i এবং j বস্তুকণার উপর যোগ করলে প্রতিটি রাশি U_{ij} দু'বার গণনা হয়।

২.৩ পরিবর্তনশীল ভর, রকেট

সংরক্ষণ উপপাদ্যগুলির একটি সুন্দর উদাহরণ হল পরিবর্তনশীল ভর বা রকেটগতির সমস্যা।

একটি বস্তু নেয়া যাক যার পরিবর্তনশীল ভর হল $m(t)$ এবং যা ভূমিতে কোন পর্যবেক্ষকের সাপেক্ষে $\underline{F}(t)$ বলের অধীনে $\underline{v}$ গতিতে ধাবমান। এই বস্তু থেকে পদার্থ বস্তুটির সাপেক্ষে λ ধ্রুবহারে $\underline{u}$ গতিতে নির্গত হয়।



চিত্র : ২.২

২.২ (ক) চিত্রে, $m(t)$ ভরের বস্তু t সময়ে $\underline{F}(t)$ বলের অধীনে $\underline{v}$ গতিতে ধাবমান। খ চিত্রে বস্তুটির ভর $t + \delta t$ সময়ে কমে $m - \lambda\delta t$ হয়েছে এবং $\lambda\delta t$ পরিমাণ পদার্থ ভূমিতে পর্যবেক্ষকের সাপেক্ষে $\underline{v} + \underline{u}$ গতিতে গতিশীল দেখানো

হয়েছে। সুতরাং t সময়ে বস্তুনিচয়ের ভরবেগ হল $m\underline{v}$ এবং $t + \delta t$ সময়ে এই ভরবেগ হল $(m - \lambda\delta t)(\underline{v} + \delta\underline{v}) + \lambda\delta t\,(\underline{v} + \underline{u})$। অতএব δt সময়ে ভরবেগ পার্থক্য হল,

$$m\delta\underline{v} + \lambda\delta t\,\underline{u} - \lambda\delta t\,\delta\underline{v}$$

এবং ভরবেগের পরিবর্তনের হার হল (আসন্ন মানে),

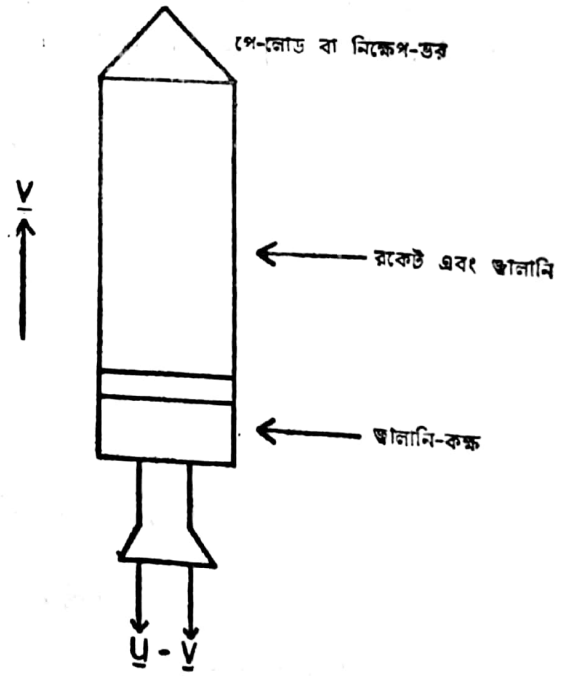
$$\lim_{\delta t \to 0}\left(m\frac{\delta\underline{v}}{\delta t} + \lambda\underline{u}\right) = m\frac{d\underline{v}}{dt} + \lambda\,\underline{u}$$

যা $\underline{F}$ বলের সমান। সুতরাং

$$\underline{F} = m\frac{d\underline{v}}{dt} + \lambda\,\underline{u}$$

যেখানে λ ভর পরিবর্তনের ধ্রুবহার।

(১) **এক ধাপবিশিষ্ট রকেট ঃ** একটি রকেট নেয়া যাক যার প্রাথমিক ভর হল M_0। এর মধ্যে আবরণ এবং জ্বালানি অন্তর্ভুক্ত। এছাড়াও আছে P ভরের 'পে-লোড' বা নিক্ষেপ-ভর।



চিত্র : ২.৩

ধরা যাক জ্বালানি প্রতি সেকেণ্ডে সুষম হারে m পরিমাণ ভর পোড়ে, যার ফলে t সময়ে সমগ্র রকেট ব্যবস্থার ভর হল

$$M(t) = M_0 + P - mt$$

t সময়ে রকেটের ঊর্ধ্ব-গতিবেগ হল $\underline{V}$ এবং রকেটের সাপেক্ষে জ্বালানি নির্গমনের গতিবেগ হল $\underline{u}$। সুতরাং জ্বালানি নিষ্ক্রমণের ভূমি সাপেক্ষে নিম্নমুখী বেগ হল $u - V$। ঊর্ধ্বদিকে t সময়ে ভরবেগ হল $(M_0 + P - mt)V$ এবং $t + \delta t$ সময়ে এটা হল $[M_0 + P - m(t + \delta t)](V + \delta V)$। অন্যদিকে প্রজ্জ্বলিত জ্বালানির ভর হল $m\delta t$ যার ঊর্ধ্বদিকে ভরবেগ হল $m\delta t(V - u)$। সুতরাং ভরবেগের পরিবর্তনের হার হল,

$$\lim_{\delta t \to 0}\left(\frac{[M_0+P-m(t+\delta t)](V+\delta V)+m\delta t(V-u)-(M_0+P-mt)V}{\delta t}\right)$$

$$= (M_0+P-mt)\frac{dV}{dt} - mu$$

এই রাশির সমান হবে মাধ্যাকর্ষণজনিত বল। সুতরাং

$$(M_0 + P - mt)\frac{dV}{dt} - mu = -(M_0+P-mt)g$$

অতএব

$$\frac{dV}{dt} = -g + \frac{mu}{M_0 + P - mt}$$

সমাকলন করে,

$$V = \int_0^T \frac{mu\,dt}{M_0 + P - mt} - gT$$

$$= -u\ln\left(1 - \frac{M_1}{M_0+P}\right) - gT$$

$$= u\ln\left(\frac{M_0+P}{M_0+P-M_1}\right) - gT$$

যেখানে T হল সেই সময় যখন সব জ্বালানি পুড়ে শেষ হয়ে যায় এবং $M_1 = mt$ অর্থাৎ M_1 হল জ্বালানির প্রাথমিক ভর। উপরের সমীকরণের দ্বিতীয় অংশ প্রথমটির তুলনায় খুবই কম। ধরা যাক,

$M_0 = ১০^৫$ কেজি $\quad T = ১৬$ সেকেণ্ড

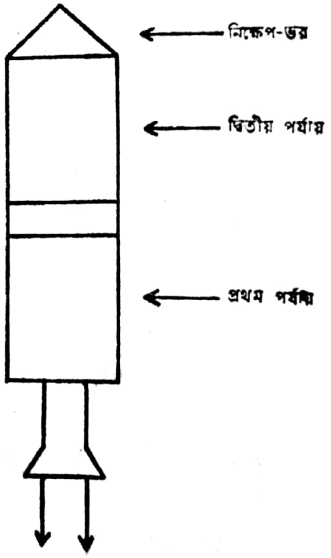
$\frac{M_0}{P} = ১০^২$ $\quad \frac{M_1}{M_0} = 0.8$

এখন u এবং g এর অনুপাত যদি এরকম হয় যে,

$$I = \frac{u}{g} = ৩০০ \text{ সেকেণ্ড}$$

তাহলে উপরের সমীকরণের প্রথম অংশ থেকে আসে ৪.৬২ কি.মি./সেকেণ্ড কিন্তু দ্বিতীয় অংশ হল মাত্র ০.১৬ কি.মি/সে., যা বাদ দেওয়া যায়। উপরের I রাশিকে জ্বালানির স্পেসিফিক ইমপাল্‌স্‌ (বিশেষ অভিঘাত) বলে।

(২) **দুই ধাপের রকেট :** ধরা যাক প্রথম ধাপের ভর হল M_1 যার ϵM_1 ভগ্নাংশ হল জ্বালানি। একইভাবে দ্বিতীয় ধাপের ভর হল M_2 যার ভগ্নাংশ



চিত্র : ২.৪

ϵM_2 হল জ্বালানির প্রাথমিক ভর। নিক্ষেপ-ভর হল P, রকেটের সাপেক্ষে জ্বালানি নির্গমনের গতিবেগ u এবং জ্বালানির নিষ্ক্রমণ হার m।

মাধ্যাকর্ষণ এবং বায়ুর প্রতিবন্ধকতা বাদ দিয়ে, প্রথম ধাপে রকেটের অর্জিত গতিবেগ হল,

$$V_1 = -u \ln \left[1 - \frac{\epsilon M_1}{M_1 + M_2 + P} \right]$$

দ্বিতীয় ধাপে জ্বালানি সম্পূর্ণ পুড়বার সময় হল $T_2 = \epsilon M_2/m$। দ্বিতীয় ধাপের জন্য নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র থেকে লেখা যায়,

$$\left(M_2 + P - mt \right) \frac{dV}{dt} = mu$$

সমাকলন করে,

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{0}^{T_2} \frac{mu \; dt}{M_2 + P - mt}$$

সুতরাং

$$V_2 - V_1 = -u \ln \left[1 - \frac{\epsilon M_2}{M_2 + P} \right]$$

কেননা $m T_2 = \epsilon M_2$। অতএব,

$$V_2 = -u \ln \left[1 - \frac{\epsilon M_1}{M_1 + M_2 + P} \right] - u \ln \left[1 - \frac{\epsilon M_2}{M_2 + P} \right]$$

$$= u \ln \left[1 - \epsilon \left\{ \frac{M_1}{M_1 + M_2 + P} + \frac{M_2}{M_2 + P} \right\} \right]$$

উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক,

$$M_1 = M_2 = 50P \qquad \epsilon_2 = 0.৮ \qquad I = ৩০০ \text{ সেকেণ্ড}$$

সুতরাং $V_2 = ৬$ কি. মি./সে. যার সঙ্গে এক ধাপের ৪.৬ কি.মি./সে. এর তুলনা করা যায়।

পৃথিবীর চারদিকে ঘুরবার জন্য নিক্ষিপ্ত বস্তুর প্রয়োজনীয় সর্বোচ্চ গতিবেগ V_2 সহজেই গণনা করা যায়। যেহেতু $M_0 = M_1 + M_2$, তাই সর্বোচ্চ গতিবেগের জন্য লেখা যায়,

$$\frac{dV_2}{dM_2} = 0$$

সুতরাং উপরের সমীকরণ থেকে,

$$\frac{1}{M_0 + P} = \frac{P}{(M_2 + P)^2}$$

অথবা

$$M_2^2 + 2PM_2 - PM_0 = 0$$

সুতরাং

$$\frac{M_2}{M_0} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \alpha}$$

যেখানে $\alpha = P/M_0$। যেহেতু α খুবই ক্ষুদ্ররাশি, তাই

$$\frac{M_2}{M_0} = \sqrt{\alpha} - \alpha$$

সুতরাং $\alpha = ১/১০০$ হলে অর্থাৎ নিক্ষেপ-ভর সামগ্রিক ভরের একশভাগের এক-ভাগ হলে, আমরা পাই $M_2 / M_0 = ১/১০$ অর্থাৎ M_1 এবং M_2 রাশিদ্বয়ের অনুপাত হল ৯ : ১। অতএব প্রথম ধাপের ভর অনেক বেশি হওয়া প্রয়োজন। V_2 গতিবেগকে আসন্নমানে এভাবে প্রকাশ করা যায়,

$$V_2 = -u \ln\left[1 - \epsilon \frac{1 - \sqrt{\alpha} + \alpha}{1 + \alpha}\right] - u \ln\left[1 - \epsilon \frac{\sqrt{\alpha} - \alpha}{\sqrt{\alpha}}\right]$$

$$= -2u \ln\left[1 - \epsilon\left(1 - \sqrt{\alpha}\right)\right]$$

যদি

$\alpha = ১/১০০$, $\epsilon = 0.৮$ এবং $I = ৩০০$ সেকেণ্ড হয়, তবে

$V_2 = ৭.৫$ কি.মি./সে.।

(৩) **বহু ধাপবিশিষ্ট রকেট ঃ** আমরা দেখাতে পারি যে উপগ্রহ প্রেরণের জন্য তিন ধাপবিশিষ্ট রকেটই যথেষ্ট। ধরা যাক M_i হল i-ধাপের প্রাথমিক ভর। সুতরাং $M_0 = M_1 + M_2 + \cdots + M_n$ হল n ধাপের রকেটের ভর, (নিক্ষেপ-ভর P ছাড়া)। উপরের সমীকরণ অনুসারে, i-পর্যায়ের গতিবেগ হল

$$V_i = -u \ln\left[1 - \frac{\epsilon M_i}{M_i + M_{i+1} + \ldots + M_n + P}\right]$$

$$= u \ln\left[\frac{M_i + M_{i+1} + \ldots + M_n + P}{(1-\epsilon) M_i + M_{i+1} + \cdots + M_n + P}\right]$$

$$= u \ln \mu_i$$

সব ধাপের জ্বালানি পুড়ে যাওয়ার পর গতিবেগ হল,

$$V = u \sum_i \ln \mu_i$$

এমনভাবে V নির্ধারিত করতে হবে এবং $M_1, M_2, \cdots M_n$ নিতে হবে যাতে M_0 সর্বনিম্ন হওয়া নিশ্চিত করা যায়। লাগ্রাঞ্জ গুণিতক পদ্ধতিতে এটা করা যায়। উপরে μ_i সংজ্ঞা অনুসারে,

$$\frac{M_i + M_{i+1} + \ldots + M_n + P}{M_{i+1} + \ldots + M_n + P} = \epsilon \frac{\mu_i}{1 - (1-\epsilon)\mu_i}$$

এখন পর পর $i = 1, 2, \ldots, n$ নিয়ে এবং গুণ করে লেখা যায়,

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\epsilon \mu_i}{1 - (1-\epsilon)\mu_i} = \frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_n + P}{P} = \frac{M_0 + P}{P}$$

সুতরাং

$$\ln\left(\frac{M_0 + P}{P}\right) = \ln\left[\epsilon^n \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{1 - (1-\epsilon)\mu_i}\right]$$

$$= n \ln \epsilon + \sum_i \left[\ln \mu_i - \ln (1-\epsilon)\mu_i\right]$$

এই রাশির সর্বনিম্ন মান বের করতে হবে নিম্নের শর্তাধীনে,

$$u \sum_i \ln \mu_i = V = \text{ধ্রুব}$$

সুতরাং লাগ্রাঞ্জ গুণিতক পদ্ধতি ব্যবহার করে আমরা নিম্নের অপেক্ষক লিখতে পারি,

$$f = \ln\left(\frac{M_0 + P}{P}\right) + \lambda u \sum_i \ln \mu_i$$

যার μ_i সাপেক্ষে অন্তরকলন শূন্য হবে,

$$\frac{\partial f}{\partial \mu_i} = 0$$

সুতরাং

$$\frac{1}{\mu_i} + \frac{1-\epsilon}{1-(1-\epsilon)\mu_i} + \frac{\lambda u}{\mu_i} = 0$$

অথাৎ

$$\lambda u = -\frac{1}{1-(1-\epsilon)\mu_i} \qquad \mu_i = \frac{1+\lambda u}{\lambda u (1-\epsilon)}$$

যেহেতু $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n$, তাই

$$V = u \sum_i \ln \mu_i = n u \ln \mu_i = n u \ln \frac{1+\lambda u}{\lambda u (1-\epsilon)}$$

অর্থাৎ লাগ্রাঞ্জ ধ্রুবক λ পাওয়া যায়,

$$\lambda = \frac{1}{u} \frac{1}{(1-\epsilon)e^{V/nu} - 1}$$

সুতরাং

$$\frac{M_0 + P}{P} = \epsilon^n \left(\frac{\mu}{1-(1-\epsilon)\mu}\right)^n = \epsilon^n \left(\frac{e^{V/nu}}{(1-\epsilon)e^{V/nu} - 1}\right)^n$$

অথবা

$$\frac{M_0}{P} = \frac{\epsilon^n e^{V/u}}{\left[(1-\epsilon)e^{V/nu} + 1\right]^n} - 1$$

আমরা $V = ৭.৮$ কি.মি. / সে., $I = ৩০০$ সে., $\epsilon = 0.৮$ নিলে, নিম্নলিখিত মানগুলি পাই,

n	২	৩	৪	৫	∞
$\frac{M_0}{P}$	১৪৭	৫২	৪০	৩৬	১৩.২

সুতরাং n যখন ৩ থেকে ৪ এ বৃদ্ধি পায় তখন M_0/P রাশি খুব বেশি কমে না। এ জন্যই যুক্তরাষ্ট্রের NASA সাধারণত তিন ধাপের রকেট ব্যবহার করে থাকে।

২.৪. গতিশর্ত ; সাধারণ স্থানাঙ্ক

একটি বস্তুনিচয়ের i-তম কণার জন্য নিউটনের গতিসূত্র আমরা এভাবে লিখেছি,

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i^{(ext)} + \sum_j \underline{F}_{ij}$$

যেখানে i বস্তুকণার উপরে $\underline{F}_i^{(ext)}$ বহিঃস্থ বল এবং j-বস্তুকণার জন্য i-বস্তুকণার উপর ক্রিয়াশীল অন্তঃস্থ বল হল $\underline{F}_{ij}$। এসব সমীকরণ সমাধানের জন্য ভৌত কারণে যেসব শর্ত উদ্ভূত হয় তাদের সমীকরণ ব্যবহার করা প্রয়োজন। উদাহরণ-স্বরূপ, একটি 'দৃঢ়সংবদ্ধ বস্তুর' ক্ষেত্রে বাধ্যবাধকতার অবশ্যপালনীয় শর্ত হল এই যে বিভিন্ন বস্তুকণার মধ্যে পারস্পরিক দূরত্ব সবসময়ই একই থাকবে।

এসব শর্ত দু'ধরনের : হলোনমীয় এবং অ-হলোনমীয়। বাধ্যবাধকতার শর্ত-গুলি যদি বিভিন্ন বস্তুকণার স্থানাঙ্ক সম্বলিত সমীকরণ দিয়ে প্রকাশ করা যায় অর্থাৎ নিম্নলিখিত সমীকরণ যদি লেখা যায়,

$$f(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \ldots ; t) = 0$$

তাহলে বাধ্যবাধকতার শর্তকে বলে হলোনমীয়। দৃঢ়সংবদ্ধ বস্তুর ক্ষেত্রে আমরা হলোনমীয় সমীকরণ লিখতে পারি,

$$\underline{r}_{ij}^2 = \text{ধ্রুব}, \text{ (এখানে } r_{ij} \text{ হল i ও j কণাদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব)}।$$

যেসব বাধ্যবাধকতার শর্ত এভাবে লেখা যায় না তাদের বলে অ-হলোনমীয়। উদাহরণস্বরূপ যদি কোণ বস্তুকণা একটি বর্তুলের উপরে ঘুরতে বাধ্য হয়,

তাহলে আমরা লিখতে পারি,

$$r^2 - a^2 \geq 0$$

যেখানে a হল বর্তুলের ব্যাসার্ধ।

যখন কোন বস্তুনিচয় উপরিউক্ত হলোনমীয় শর্তাধীনে গতিশীল তখন স্থানাঙ্ক $\underline{r}_i$ গুলি স্পষ্টতঃই আর পরস্পর নিরপেক্ষ থাকে না। আসলে বাধ্যবাধকতা সৃষ্টিকারী বল প্রাথমিকভাবে জানা যায় না এবং বস্তুকণাকে শর্ত সমীকরণের অধীনে নিয়ে আসার অর্থই হচ্ছে এই যে এমন সব বল আছে যাদের সরাসরি সুনির্দিষ্ট করা যায় না।

বস্তুনিচয় যদি হলোনমীয় শর্তাধীনে থাকে তাহলে আমরা সাধারণ স্থানাঙ্ক প্রবর্তন করতে পারি। N-সংখ্যক কণা নিয়ে গঠিত একটি বস্তুনিচয় বা সিস্টেম বিবেচনা করা যাক। যে কোন সময়ে এই বস্তুনিচয়ের অবস্থা নির্দেশ করতে হলে প্রতিটি কণার জন্য একটি সদিক রাশি এই হিসাবে N সংখ্যক অবস্থান সদিক রাশি ব্যবহার করা প্রয়োজন। যেহেতু প্রতি অবস্থান সদিক রাশির তিনটি উপাংশ থাকে তাই সব বস্তুকণার অবস্থান নির্দেশ করার জন্যে আমাদের মোট 3N স্বতন্ত্র স্থানাঙ্কের প্রয়োজন।

এখন হলোনমীয় শর্ত হল নিম্নলিখিত l সংখ্যক সমীকরণ,

$$f_l\,(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \ldots ; t) = 0$$

যা স্থানাঙ্কের কতকগুলিকে অন্য কতকগুলির সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত করে, যেমন দৃঢ়সংবদ্ধ বস্তুর ক্ষেত্রে আগেই দেখানো হয়েছে। সেক্ষেত্রে 3N স্থানাঙ্কের সবগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ নয়। আমরা উপরের l সমীকরণ ব্যবহার করে 3N স্থানাঙ্ক থেকে l সংখ্যক স্থানাঙ্ক বাদ দিতে পারি, যার ফলে 3N—l সংখ্যক স্বতন্ত্র স্থানাঙ্ক অবশিষ্ট থাকবে। সেক্ষেত্রে বস্তুনিচয়ের 3N—l স্বাধীনতার মাত্রা (ডিগ্রী অব ফ্রিডম) আছে বলা হয়।

একটি হলোনমীয় বস্তুনিচয়ের 3N-l স্বতন্ত্র পরিবর্তী রাশিকে $q_1, q_2 \ldots, q_n$ দিয়ে প্রকাশ করা যায়, যেখানে $n = 3N - l$ এবং এগুলিকেই বলা হয় সাধারণ অবস্থান স্থানাঙ্ক। লক্ষ্য করা প্রয়োজন যে, যে-কোন n স্বতন্ত্র রাশি পছন্দ করা যায় যাদের এমনকি দৈর্ঘ্যের মাত্রা থাকারও প্রয়োজন নেই। যা প্রয়োজন তা হল এই যে এই n রাশি বস্তুনিচয়ের অবস্থা সম্পূর্ণরূপে নির্দেশিত করবে।

একগুচ্ছ সাধারণ স্থানাঙ্ক এককভাবে পছন্দ করা যায় না, এবং সবচেয়ে উপযোগী সাধারণ স্থানাঙ্ক পছন্দ করার কোন সাধারণ নিয়মও নেই। উপযোগী গুচ্ছের প্রমাণ হল এই যে, সেগুলি ব্যবহার করে গতিসমীকরণগুলিকে এমনভাবে প্রকাশ করা সম্ভব কিনা যার ফলে তাদের ভৌত ব্যাখ্যা দেয়া যায়।

আমরা পুরাতন স্থানাঙ্ক $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \ldots, \underline{r}_N$ নতুন স্থানাঙ্ক $q_1, q_2, \ldots, q_n$ দিয়ে নিম্নোক্ত সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারি,

$$\underline{r}_i = \underline{r}_i (q_1, q_2, \ldots q_n) \qquad i = 1, 2, \ldots N, n = 3N - l$$

উল্লিখিত সমীকরণসমূহকে $\underline{r}_i$ স্থানাঙ্ক থেকে q_i স্থানাঙ্কে রূপান্তর সমীকরণ বলে।

হলোনমীয় বস্তুনিচয়ের একটি উদাহরণ দেয়ার জন্য আমরা দুটি বস্তুকণা সম্বলিত বস্তুনিচয় নিতে পারি যার বিভবশক্তি হল.

$$U (x_1, x_2) = \tfrac{1}{2} k (x_1 - x_2 - a)^2$$

এখানে k এবং a দুটি ধ্রুব সংখ্যা। দুটি বস্তুকণার নিউটনীয় গতিসমীকরণ হল

$$m_1 \ddot{x}_1 = F_1 = - \frac{\partial U}{\partial x_1} = - k (x_1 - x_2 - a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = F_2 = - \frac{\partial U}{\partial x_2} = k (x_1 - x_2 - a)$$

এখন আমরা ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক X এবং আপেক্ষিক দূরত্ব x নিয়ে আসতে পারি নিম্নোক্ত সমীকরণের মাধ্যমে,

$$(m_1 + m_2) X = m_1 x_1 + m_2 x_2$$

$$x = x_1 - x_2$$

x_1 এবং x_2 এর জন্য সমাধান করে পাওয়া যায়,

$$x_1 = X + \frac{\mu}{m_1} x \qquad x_2 = X - \frac{\mu}{m_2} x$$

যেখানে μ হল হ্রাসপ্রাপ্ত ভর, অর্থাৎ

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M}$$

এখন গতি-সমীকরণ দুটি লেখা যায়,

$$m_1 \ddot{X} + \mu \ddot{x} = -k(x-a)$$
$$m_2 \ddot{X} - \mu \ddot{x} = k(x-a)$$

সুতরাং

$$(m_1 + m_2)\ddot{X} = 0 \qquad \mu \ddot{x} = -k(x-a)$$

প্রথম সমীকরণটির সমাধান থেকে বলা যায় যে, বস্তুনিচয়ের ভরকেন্দ্র ধ্রুব গতি-বেগে পরিক্রমণশীল এবং দ্বিতীয় সমীকরণ সমাধান করে আমরা পাই

$$x - a = \sqrt{\frac{2A}{k}} \sin \omega (t - t_0)$$

যেখানে A এবং t_0 দুটি ধ্রুব সংখ্যা এবং $\omega = \sqrt{k/\mu}$ ।

আপেক্ষিক গতির জন্য গতিশক্তি হল,

$$T = \tfrac{1}{2}\mu \dot{x}^2 = \tfrac{1}{2}\mu \frac{2A}{k} \omega^2 \cos^2 \omega (t - t_0) = A \cos^2 \omega (t - t_0)$$

এবং বিভবশক্তি হল,

$$U = \tfrac{1}{2} k (x_1 - x_2 - a)^2$$
$$= \tfrac{1}{2} k (x-a)^2$$
$$= \frac{k}{2} \cdot \frac{2A}{k} \sin^2 \omega (t - t_0) = A \sin^2 \omega (t - t_0)$$

সুতরাং সামগ্রিক শক্তি হল

$$E = T + U = A \cos^2 \omega (t - t_0) + A \sin^2 \omega (t - t_0)$$
$$= A$$

অর্থাৎ A ধ্রুবকটি সামগ্রিক শক্তি ছাড়া আর কিছুই নয়।

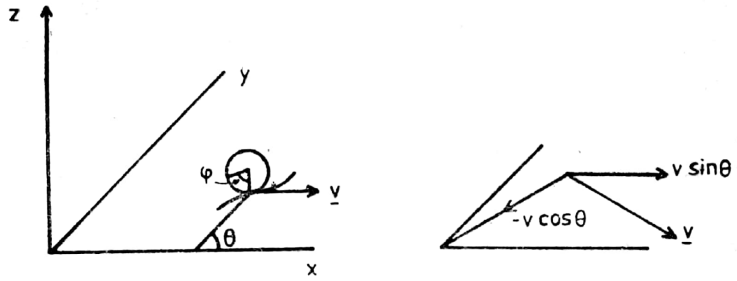
এখন নির্দিষ্ট সামগ্রিক শক্তি E থাকলে, যখন k বাড়ে (অর্থাৎ মিথস্ক্রিয়া যত বাড়ে), a-এর সাপেক্ষে x-এর স্পন্দন-সংখ্যা ω তত বাড়ে, কেননা $\omega^2 = k/\mu$, কিন্তু স্পন্দনের বিস্তার $\sqrt{2E/k}$ কমে যত k বাড়ে। সুতরাং k যদি

অসীম হয় তাহলে x হয়ে যায় a এর সমান যার অর্থ হল এই যে বস্তুনিচয়টি এমন আচরণ করছে যেন বস্তুকণা দুটি পরস্পরের a নির্দিষ্ট দূরত্বে থাকতে বাধ্য হয়। অন্য কথায় আমরা একটি বাধ্যবাধকতার সমীকরণ পাই,

$$x - a = 0$$

যখন বিভবশক্তি অসীম। সেক্ষেত্রে বস্তুনিচয়ের উপর একটি হলোনমীয় শর্ত আরোপ করা হয়েছে বলা হয়।

একটি অ-হলোনমীয় শর্তের উদাহরণ দিতে হলে আমরা সমান্তরাল তলের উপরে একটি চাকার গতি আলোচনা করতে পারি, যেখানে চাকার তল সব সময়েই সমান্তরাল তলের উপর লম্ব।



চিত্র : ২.৫

চাকার গতিবেগ হল

$$v = a\,\dot{\varphi}$$

এবং দিক হবে চাকার অক্ষের সাথে লম্ব অভিমুখে।

এখানে a হল চাকার ব্যাধার্ধ এবং φ হল চাকা যতখানি ঘুরেছে সেই কোণের পরিমাণ। চাকার অক্ষ এবং x-অক্ষের মধ্যে কোণ θ হলে,

$$\dot{x} = v\sin\theta \qquad \dot{y} = -v\cos\theta$$

সুতরাং

$$dx = a\sin\theta\, d\varphi$$

$$dy = a\cos\theta\, d\varphi$$

যা সমাকলন করা যায় না। আমরা শুধু লিখতে পারি

$$(dx)^2 + (dy)^2 = a^2\,(d\varphi)^2$$

যায় অর্থ হল যে বাধ্যবাধকতার শর্তকে সহজভাবে $f(x, y) = o$ আকারে প্রকাশ করা যায় না এবং তাই গতি হল অ-হলোনমীয়।

এ ধরনের সমীকরণ, যার সমাকলন করা যায় না, তাই একমাত্র অ-হলোনমীয় শর্ত নয়। বাধ্যবাধকতার শর্তে উচ্চ-পর্যায়ের অন্তরকলন থাকতে পারে অথবা তা অসমতার সমীকরণ হিসেবেও দেখা দিতে পারে। যদি শর্ত সমীকরণকে সমাকলন করা না যায় তাহলে লাগ্রাঞ্জীয় গুণক পদ্ধতিতে ঐ শর্তকে গতি-সমীকরণে অন্তর্ভুক্ত করে নেয়া যায়। অবশ্য এজন্য প্রথমে গতি-সমীকরণকে অয়লার-লাগ্রাঞ্জ সমীকরণে প্রকাশ করা প্রয়োজন।

২.৫ দা'লেমবার্তের নীতি

একটি বস্তু-কণানিচয়ের অপ্রকৃত সরণ বিবেচনা করা যাক। অপ্রকৃত সরণ হল বস্তুনিচয়ের বিন্যাস পরিবর্তন যেখানে হলোনমিক সীমাবদ্ধতার সমীকরণ ভঙ্গ করা হয় না। সুতরাং স্থানাঙ্কের অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তন $\delta \underline{r}_i$ ঐ বস্তুনিচয়ের উপর কোন মুহূর্তে আরোপিত বল এবং বাধ্যবাধকতার শর্তের সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ হতে হবে। অন্যদিকে, প্রকৃত সরণে আরোপিত বল এবং বাধ্যবাধকতার মধ্যেও পরিবর্তন হতে পারে।

সীমাবদ্ধতার সমীকরণের সংখ্যা যদি l হয়, তবে N সংখ্যাবিশিষ্ট বস্তুনিচয়ের 3N সংখ্যার স্বাধীনতার মাত্রা থাকে না; তখন স্বাধীনতার মাত্রা হয় কেবল $n = 3N - l$। সীমাবদ্ধতার সমীকরণগুলি

$$f_l(\underline{r}_1, \cdots, \underline{r}_N; t) = o \qquad (২.৩৯)$$

বস্তুনিচয়ের উপর বলের আবির্ভাব ঘটায় যার ফলে এই সমীকরণগুলির সার্থক করাও নিশ্চিত করা যায়। এভাবে উদ্ভূত বলগুলিকে $\underline{F}'_i$ বলা যায়। অর্থাৎ বস্তু-কণার উপর সক্রিয় সামগ্রিক বলকে দুভাগে ভাগ করা যায়, এক অংশ হল সীমাবদ্ধতাজনিত বল $\underline{F}'_i$ এবং অন্য অংশ হল অন্যান্য উৎস থেকে উদ্ভূত বল $\underline{F}_i$। সুতরাং নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রকে এভাবে লেখা যায়,

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \underline{F}'_i$$

অজ্ঞাত রাশিগুলি হল $\underline{r}_i$ এবং $\underline{F}'_i$ অর্থাৎ মোট 6N সংখ্যক রাশি। কিন্তু আমাদের আছে কেবল 3N সংখ্যক নিউটনীয় গতিসমীকরণ এবং l সংখ্যক সীমাবদ্ধতার সমীকরণ (২.৩৯)। সুতরাং আমাদের আরো $3N - l$ সমীকরণের প্রয়োজন। এগুলিই দা'লেমবার্তের নীতি থেকে পাওয়া যায়। এই নীতি অনসারে "যে কোন

যান্ত্রিক বস্তুনিচয়ে সীমাবদ্ধতাজনিত বলের দ্বারা সম্পন্ন অপ্রকৃত কাজের পরিমাণ শূন্য।"

বাস্তবিকপক্ষে যান্ত্রিক বস্তুনিচয়ের সংজ্ঞাই হলো এই যে তার উপর সীমাবদ্ধতাজনিত বলের কাজের পরিমাণ শূন্য। অন্য কথায়, সীমাবদ্ধতাজনিত বল এ ধরনের যে তা কোন অপ্রকৃত কাজ করতে পারে না।

এই নীতি প্রমাণ করার জন্য দুটো বস্তুকণার একটা বস্তুনিচয় নেয়া যাক। নিউটনের দ্বিতীয় আইন অনুসারে দুই বস্তুকণার উপর সীমাবদ্ধতাজনিত বল $\underline{F}'_1$ এবং $\underline{F}'_2$ সমান এবং বিপরীতমুখী হতে হবে এবং তাদের সংযোগকারী রেখা বরাবর ঐ বল কাজ করবে। সুতরাং (২.২২) সমীকরণের মতো ছন্দিত স্পন্দনের বিভবের ক্ষেত্রে,

$$\underline{F}'_1 = -\underline{F}'_2 = -k(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

যেখানে k একটি ধ্রুবরাশি। সীমাবদ্ধতার সমীকরণ হল

$$\underline{r}^2_{12} = (\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \cdot (\underline{r}_1 - \underline{r}_2) = \text{ধ্রুবরাশি} = c^2$$

এই সীমাবদ্ধতা লংঘন করে না এমন অপ্রকৃত সরণ $\delta\underline{r}_1$ এবং $\delta\underline{r}_2$ অবশ্যই নিচের সমীকরণকে সিদ্ধ করবে,

$$(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \cdot (\delta\underline{r}_1 - \delta\underline{r}_2) = 0$$

সীমাবদ্ধতাজনিত বলের অপ্রকৃত কাজের পরিমাণ হল,

$$\begin{aligned}\delta W &= \underline{F}'_1 \cdot \delta\underline{r}_1 + \underline{F}'_2 \cdot \delta\underline{r}_2 \\ &= -k(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \cdot \delta\underline{r}_1 + k(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \cdot \delta\underline{r}_2 \\ &= -k(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \cdot (\delta\underline{r}_1 - \delta\underline{r}_2) \\ &= 0\end{aligned}$$

এটাই দা'লেমবার্তের নীতির প্রমাণ। এই নীতির গাণিতিক প্রকাশ হল,

$$\sum_i \underline{F}'_i \cdot \delta\underline{r}_i = 0 \qquad (২.২৪)$$

অবশ্য অপ্রকৃত সরণ $\delta\underline{r}_i$ নিচের l সংখ্যক সমীকরণ সার্থক করবে [(২.২৩) সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত],

$$\sum_i \left(\frac{\partial f_l}{\partial \underline{r}_i} \cdot \delta\underline{r}_i\right) = \sum_i (\underline{\nabla}_i f_l) \cdot \delta\underline{r}_i = 0 \qquad (২.২৫)$$

এই সমীকরণগুলি ব্যবহার করে আমরা এখন আরো $3N - l$ সমীকরণ পাই যা দিয়ে গতি সমস্যার সম্পূর্ণ সমাধান সম্ভব।

যেহেতু $\delta \underline{r}_i$ সবগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ নয়, তাই আমরা (২.২৪) সমীকরণ থেকে $\delta \underline{r}_i$ সরণের l অংশ বাদ দিতে পারি। (২.২৫) সমীকরণের প্রতিটিকে লাগ্রাঞ্জ গুণিতক λ_j দিয়ে গুণ করে ঐ $\delta \underline{r}_i$ এর সঙ্গে যোগ করে আমরা পাই,

$$\sum_{i=1}^{3N} \delta \underline{r}_i \cdot \left(\underline{F}'_i + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \underline{\nabla}_i f_j \right) = 0 \qquad (২.২৬)$$

এখন আমরা λ_j গুলিকে এমনভাবে পছন্দ করি যাতে l সংখ্যক $\delta \underline{r}_i$ সরণের সহগগুলি শূন্য হয়,

$$\underline{F}'_i + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \underline{\nabla}_i f_j = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, l \qquad (২.২৭)$$

শুধু l সংখ্যক অংশের জন্যেই এই সমীকরণ ব্যবহার করতে হবে এবং এভাবেই λ_l নির্ধারিত করা যায়। এই λ_l রাশি (২.২৬) সমীকরণে ব্যবহার করলে আমরা দেখি যে এখন আমাদের যোগের সূচক i এর মান 1 থেকে $3N - l = n$ রাশি পর্যন্ত যায়। কিন্তু $\delta \underline{r}_i$ সরণের এই n অংশ এখন পরস্পর নিরপেক্ষ। সুতরাং পরস্পর নিরপেক্ষ প্রতিটি পরিবর্তনের $\delta \underline{r}_i$ -এর জন্য (২.২৬) সমীকরণ এখন সার্থক, যদি অবশ্য (২.২৭) সমীকরণ সার্থক হয়। অর্থাৎ (২.২৭) সমীকরণ $i = 1, 2, \ldots, 3N$ সব রাশির জন্যই সার্থক।

এভাবে আমরা পাই,

$3N$ গতিসমীকরণ : $\quad m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \underline{F}'_i$

l সীমাবদ্ধতার সমীকরণ : $\quad f_l (\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N ; t) = 0$

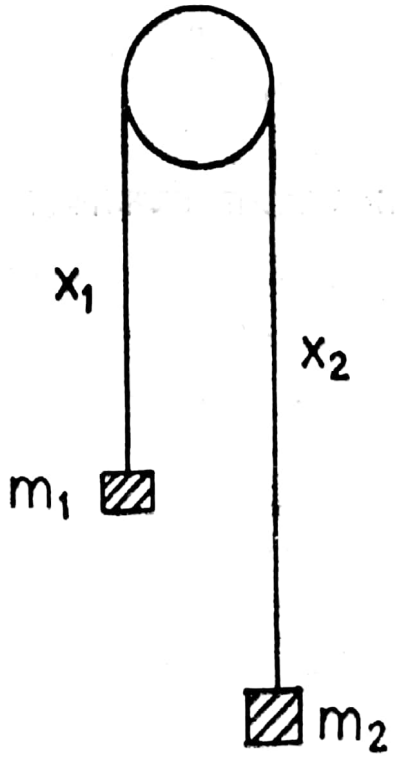
$3N$ সমীকরণ : $\quad \underline{F}'_i + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \nabla_i f_l = 0$

এবং l সংখ্যক রাশি : $\quad \lambda_l$

এই পদ্ধতিকে লাগ্রাঞ্জ গুণক পদ্ধতি বা অনির্ধারিত গুণক পদ্ধতি বলে এবং এভাবে আমরা প্রথম প্রকারের লাগ্রাঞ্জ গতিসমীকরণ পাই,

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i - \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \underline{\nabla}_i f \qquad (২.২৮)$$

উদাহরণস্বরূপ আমরা এটউড যন্ত্র আলোচনা করতে পারি। এ যন্ত্রে দুটো ভর m_1 এবং m_2 একটি ! দৈর্ঘ্যের ভরহীন তার দিয়ে সংযুক্ত। তারটি একটি ভরহীন পলির উপর দিয়ে অবাধে চলতে পারে।



চিত্র : ২.৬

এক্ষেত্রে সীমাবদ্ধতার সমীকরণ হল,

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - l = 0$$

এবং গতিসমীকরণ হল (২.২৮ সমীকরণ থেকে),

$$m_1 \ddot{x}_1 = -m_1 g - \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} = -m_1 g - \lambda$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -m_2 g - \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2} = -m_2 g - \lambda$$

এ থেকে বোঝা যায় যে লাগ্রাঞ্জ গুণিতক λ এক্ষেত্রে আসলে তারের টান বা টেনশন বল। যেহেতু $x_2 = l - x_1$, তাই আমরা লিখতে পারি,

$$\ddot{x}_1 = -g - \frac{\lambda}{m_1} \qquad -\ddot{x}_1 = -g - \frac{\lambda}{m_2}$$

সুতরাং তারের উপর টান বল হল,

$$T = -\lambda = \frac{2g\, m_1\, m_2}{m_1 + m_2}$$

এবং m_2 ভরের ত্বরণ হল,

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g$$

২.৬ দা'লেমবার্ত নীতি থেকে লাগ্রাঞ্জীয় গতিসমীকরণ

দা'লেমবার্ত নীতি অনুসারে সীমাবদ্ধতাজনিত বলের দ্বারা সম্পন্ন অপ্রকৃত কাজের পরিমাণ শূন্য। সুতরাং কোন বস্তুনিচয়ের উপর কাজের উৎস হবে অন্যান্য বল। কিন্তু নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে,

$$\underline{F}_i = \dot{\underline{p}}_i$$

সুতরাং অপ্রকৃত সরণ $\delta\underline{r}_i$-এর জন্য লেখা যায়,

$$\sum_{i=1}^{N} (\underline{F}_i - \dot{\underline{p}}_i) \cdot \delta\underline{r}_i = 0 \qquad (২.২৯)$$

এখন আমরা নিম্নের রূপান্তরের মাধ্যমে সাধারণ স্থানাঙ্ক $q_1 \cdots q_n$ রাশিতে পরিবর্তন করতে পারি (৬১ পৃষ্ঠার রূপান্তর সমীকরণ দেখ),

$$\underline{r}_i = \underline{r}_i (q_1, q_2, \ldots, q_n ; t) \qquad (২.৩০)$$

এখানে $n = 3N - l$ হল পরস্পর নিরপেক্ষ স্বাধীনতা-মাত্রার সংখ্যা।

যেহেতু সংজ্ঞা অনুসারে অপ্রকৃত সরণ হল কেবল স্থানাঙ্কের পরিবর্তন,

$$\delta\underline{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\, \delta q_j \qquad (২.৩১)$$

আবার i বস্তুকণার গতিবেগ হল,

$$\underline{v}_i = \frac{d\underline{r}_i}{dt} = \sum_{j} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \qquad (২.৩২)$$

সুতরাং $\underline{F}_i$ বল দ্বারা সম্পন্ন অপ্রকৃত কাজের পরিমাণ হল

$$\sum_i \underline{F}_i \cdot \delta\underline{r}_i = \sum_i \sum_j \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j \qquad (২.৩৩)$$

যেখানে

$$Q_j = \sum_i \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \qquad (২.৩৪)$$

এই Q_j রাশিকে 'সাধারণী বলের' j অংশ বলা হয়।

অন্যদিকে আমরা লিখতে পারি,

$$\sum_i \dot{\underline{p}}_i \cdot \delta\underline{r}_i = \sum m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \delta\underline{r}_i = \sum_i \sum_j m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \qquad (২.৩৫)$$

কিন্তু

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\right) = m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} + m_i \dot{\underline{r}}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\right) \qquad (২.৩৬)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_j}\left[\sum_k \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}\right]$$

$$= \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial q_j} \qquad (২.৩৭)$$

আবার (২.৩২) সমীকরণ থেকে লেখা যায়,

$$\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

সুতরাং (২.৩৬) সমীকরণ থেকে,

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) = m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} + m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \underline{v}_j}{\partial q_j}$$

এবং (২.৩৫) সমীকরণ থেকে,

$$\sum_i \dot{\underline{p}}_i \cdot \delta \underline{r}_i = \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_i m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

$$= \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\tfrac{1}{2} \sum_i m_i \underline{v}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\tfrac{1}{2} \sum_i m_i \underline{v}_i^2 \right) \right\} \delta q_j$$

$$= \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \qquad (২.৩৮)$$

যেখানে T হল গতিশক্তি,

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i \underline{v}_i^2$$

সুতরাং (২.২৯) সমীকরণে (২.৩৩) এবং (২.৩৮) সমীকরণ ব্যবহার করে লেখা যায়,

$$\sum_{j=1} \left[Q_j - \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \right] \delta q_j = 0$$

যেহেতু সাধারণ স্থানাঙ্কগুলি q_j সকলেই পরস্পর নিরপেক্ষ, তাই এই সমীকরণ সার্থক করতে হলে আমাদের প্রয়োজন নিচের সমীকরণ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1, 2, \cdots n \qquad (২.৩৯)$$

শক্তি সংরক্ষণশীল বস্তুনিচয়ের জন্যে আমরা বিভবশক্তি অপেক্ষককে $U(\underline{r}_1, \cdots, \underline{r}_N)$ লিখতে পারি এভাবে,

$$\underline{F}_i = - \underline{\nabla}_i U$$

সুতরাং (২.৩৪) সমীকরণ-থেকে লেখা যায়,

$$Q_j = - \sum_{i=1}^{N} \underline{\nabla}_i U \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

যেখানে আংশিক অন্তরকলন ব্যবহার করা হয়েছে। অতএব (২.৩৯) সমীকরণকে এভাবে লেখা যায়,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_i} = 0$$

এখানে প্রথম অংশে বিভবশক্তি অপেক্ষক U রাশি q_i রাশির উপর নির্ভর করে না, এটাই ব্যবহার করা হয়েছে।

এখন আমরা লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক L-এর সংজ্ঞা দিতে পারি এভাবে,

$$L = T - U$$

অর্থাৎ গতিশক্তি এবং বিভবশক্তির পার্থক্য হল লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক। সুতরাং লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক নিচের সমীকরণগুলি সিদ্ধ করে,

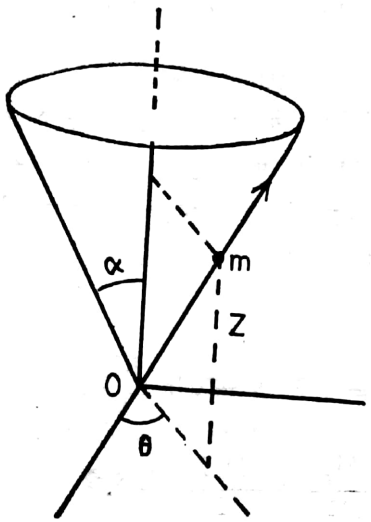
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (২.৪০)$$

এই গুরুত্বপূর্ণ লাগ্রাঞ্জ সমীকরণগুলির আর একটি নির্ধারণ পরবর্তী অধ্যায়ে দেয়া হবে।

উদাহরণ

(১) একটি m ভরসম্পন্ন বস্তুকণা একটি শঙ্কুর পৃষ্ঠদেশে অভিকর্ষ বলের অধীনে পরিভ্রমণশীল। বস্তুকণার শক্তিসমীকরণ নির্ধারণ কর।

উত্তর ঃ



চিত্র : ২.৭

কোণের অক্ষকে z-অক্ষ এবং তার শীর্ষবিন্দুকে মূলবিন্দু O নেয়া হল। যেহেতু চোঙে প্রতিসাম্য বর্তমান তাই আমরা চোঙ স্থানাঙ্ক r, θ, z ব্যবহার করতে পারি যেখানে

$$ds^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2 + (dz)^2$$

এবং $$\underline{v} = \dot{r}\,\hat{\underline{r}} + r\dot{\theta}\,\hat{\underline{\theta}} + \dot{z}\,\hat{\underline{k}}$$

সুতরাং $$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2$$

সীমাবদ্ধতার সমীকরণ হল

$$z = r\cot\alpha$$

অতএব $$v^2 = \dot{r}^2\,\mathrm{cosec}^2\,\alpha + r^2\dot{\theta}^2$$

স্পষ্টতই r এবং θ এক্ষেত্রে দুটি সাধারণ স্থানাঙ্ক এবং বস্তুকণার বিভবশক্তি হল,

$$U = mgz = mgr\cot\alpha$$

অতএব শক্তির সমীকরণ হল,

$$E = \tfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\,\mathrm{cosec}^2\,\alpha + r^2\dot{\theta}^2\right) + mgr\cot\alpha$$

(২) একটি রকেটের সর্বোচ্চ বস্তু-পরিত্যাগ গতিবেগ প্রতি সেকেণ্ডে ২ কি. মি.। যদি রকেটটিকে নিষ্ক্রমণ গতিবেগ ১১.২ কি. মি / সেকেন্ড অর্জন করতে হয় তবে তার M_0/M অনুপাত কত হবে? যদি রকেটের ভর পরিবর্তনের হার ১/১০ হয় তবে স্থিরাবস্থা থেকে শুরু করে নিষ্ক্রমণ গতিবেগ অর্জন করতে তার কত সময় লাগবে?

উত্তর : যেহেতু

$$V_0 = 0, \quad V = v\ln\frac{M_0}{M}$$

সুতরাং $$\ln\frac{M_0}{M} = \frac{11.2}{2} = 5.6$$

অতএব $$M_0/M = 270$$

আবার $$M = M_0(1-\beta t) = M_0\left((1-\frac{t}{10}\right)$$

সুতরাং $$t = 10\left(1-\frac{1}{270}\right) = 9.96 \text{ সেকেণ্ড।}$$

প্রশ্নমালা

১। অভিকর্ষের অধীনে একটি m ভরের বস্তুকণা α অর্ধকোণের শঙ্কুর পৃষ্ঠ-দেশে ঘোরে। লাগ্রাঞ্জীয় পদ্ধতিতে গতিসমীকরণ নির্ধারণ কর।

২। একটি α কোণে আনত l দৈর্ঘ্যের তলের উপর দিয়ে একটি চাকতি না পিছলে ঘুরতে ঘুরতে নিচে নামে। দেখাও যে তার চূড়ান্ত গতিবেগ হল

$$v = \sqrt{4gl\sin\alpha/3}\ ।$$

৩। প্রমাণ কর যে লাগ্রাঞ্জের সমীকরণ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

যেখানে T হল গতিশক্তি এবং Q_j হল সাধারণীকৃত বল এভাবেও লেখা যায়,

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j} - 2\frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

৪। এটউড্ যন্ত্রে একটি পুলির দুপাশে একটি। দৈর্ঘ্যের দড়ির মাধ্যমে m_1 এবং m_2 ভরের দুটি বস্তু ঝোলানো হয়। লাগ্রাঞ্জীয় পদ্ধতিতে দড়ির টান নির্ধারণ কর।

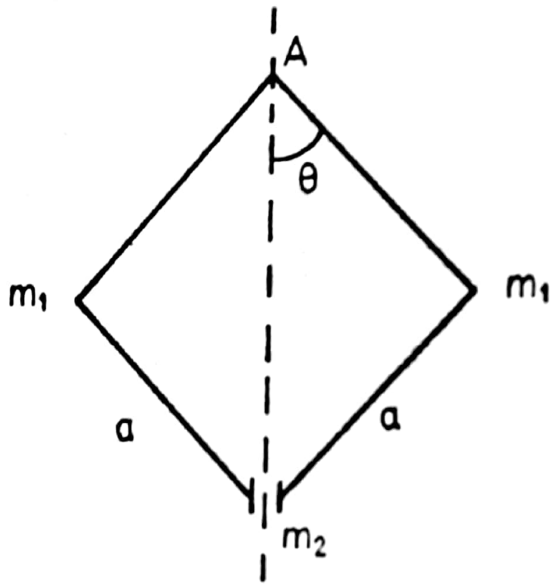
৫। একটি বর্তুলাকার দোলক অর্থাৎ একটি দৃঢ় ভরহীন দণ্ডের সাহায্যে ঝুলানো একটি ভরের লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ নির্ধারণ কর।

৬। দুটি ক্ষুদ্র ধাতব গোলক A এবং B একই ভরবিশিষ্ট এবং একই সমান্তরাল তলের দুটি বিন্দু A´ এবং B´ থেকে ঝুলানো রয়েছে যাদের মধ্যে দূরত্ব a এবং গোলক দুটি l দৈর্ঘ্যের বিদ্যুৎ-অপরিবাহী সুতা দিয়ে ঝুলানো। গোলক দুটিকে সমান c বৈদ্যুতিক আধান দিয়ে আহিত করা হল। এখন A গোলককে q_1 ক্ষুদ্র দূরত্বে এবং B কে q_2 ক্ষুদ্র দূরত্বে পাশে টানা হলে (একই তলে) সময়ের অপেক্ষক হিসেবে তাদের সরণ নির্ধারণ কর।

৭। একটি M ভরের সরল দোলকের ঝুলন-বিন্দুতে m ভরের বস্তু রয়েছে এবং M এর ঘূর্ণন তলে m ভরটি সরতে পারে। এই বস্তুনিচয়ের লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক এবং তা থেকে লাগ্রাঞ্জীয় গতিসমীকরণ নির্ণয় কর।

৮। একটি সরল দোলকের ভর m এবং তার ঝুলন-বিন্দু একটি উল্লম্ব বৃত্তের উপরে ধ্রুব স্পন্দনসংখ্যা ω তে সুষম গতিতে ঘূর্ণনশীল। তার লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক নির্ধারণ কর।

৯। নিচের বস্তুনিচয়ের লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক নির্ধারণ কর



চিত্র : ২.৮

এখানে m_2 ভর উল্লম্ব অক্ষের উপর গতিশীল এবং সমগ্র বস্তুনিচয় এই অক্ষের চারদিকে ধ্রুব কৌণিক ভরবেগ ω-এ ঘূর্ণনশীল।

১০। একটি রকেট v_0 গতিতে উপরের দিকে উঠতে শুরু করে। দেখাও যে h উচ্চতায় গতিবেগ v যেখানে

$$v_0^2 - v^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{h}{R}}$$

এবং R পৃথিবীর ব্যাসার্ধ। একটি রকেট যদি তার নিষ্ক্রমণ গতির ৯০% গতিতে নিক্ষিপ্ত হয় তাহলে তার সর্বোচ্চ উচ্চতার পরিমাণ নির্ধারণ কর।

১১। ধরা যাক কোন টেবিলের উপরে একটি গর্তের পাশে এক জায়গায় একটি শিকল স্তূপীকৃত হয়ে আছে। শিকলের ভর হল প্রতি একক দৈর্ঘ্যে p।

যদি শিকলের একদিক গর্তের মধ্য দিয়ে ফেলে দেয়া হয়, তবে তা পড়ার সময়ে শিকলের বাকি অংশটাও টেনে নামাবে। সময়ের সাপেক্ষে শিকলের নিচের প্রান্ত কেমনভাবে গতিশীল ? দেখাও যে নিম্নপ্রান্তের ত্বরণ হল g/3।

১২। একটি রকেট যার t সময়ে ভর হল $m_0(1-\alpha t)$ তা স্থির অবস্থা থেকে উপরের দিকে চলতে শুরু করেছে। নিষ্ক্রান্ত বস্তুর রকেটের সাপেক্ষে পশ্চাৎমুখী গতি হল $4g/\alpha$। ধরা যাক মাধ্যাকর্ষণ শক্তিক্ষেত্র g ধ্রুব এবং বায়ুমণ্ডলের প্রতিবন্ধকতা হল $2m_0 v\alpha$ যেখানে v হল রকেটের গতিবেগ। দেখাও যে যখন রকেট $g/3\alpha^2$ উচ্চতায় পৌঁছায় তখন তার প্রাথমিক ভরের অর্ধেকমাত্র অবশিষ্ট থাকে।

১৩। একটি M_0 ভরবিশিষ্ট মেশিনগান একটি সমান তলে বসান আছে এবং তা থেকে সুষম হারে এবং ঐ মেশিনগানের সাপেক্ষে u ধ্রুব গতিতে m ভরের গোলা নিক্ষেপ করা হবে। যদি মেশিন গান এবং তলের মধ্যে পিছলান ঘর্ষণের সহগ হয় μ এবং সব গোলাই T সময়ে নিক্ষেপ করা হয়ে যায়, তবে দেখাও যে কামানের পশ্চাৎবেগ হল

$$u \ln\left(1+\frac{m}{M_0}\right)-\mu g T$$

তৃতীয় অধ্যায়

পরিবর্তন পদ্ধতিতে লাগ্রাঞ্জ গতিসমীকরণ

৩.১ পরিবর্তন অন্তরকলন

অয়লার-লাগ্রাঞ্জ গতিসমীকরণ একটি 'পরিবর্তন-নীতির' মাধ্যমে নির্ধারণ করা যায়। হ্যামিল্টনের এই পদ্ধতি বর্ণনা করার আগে আমরা পরিবর্তন নীতি ব্যাখ্যা করতে পারি।

পরিবর্তন অন্তরকলনের মৌলিক সমস্যা হল এমন একটি অপেক্ষক $y(x)$ নির্ধারণ করা যা দিয়ে নিম্নের সমাকলনকে,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\,[\,y(x), y'(x)\,;\,x\,]\,dx \qquad (৩.১)$$

একটি পরম বা চূড়ান্ত রাশি অর্থাৎ সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের রাশি করা যায়। সমাকলনের f অপেক্ষককে বলা হয় ফাংশনাল। অর্থাৎ f হল $y(x)$ এবং তার অন্তরকলন $y' = dy/dx$ এর অপেক্ষক। সমাকলন J-এর প্রান্তবিন্দুদ্বয় অপরিবর্তী।

এখন $y(x)$ অপেক্ষককে এমনভাবে পরিবর্তন করতে হবে যাতে J সমাকলনের একটি পরম মান পাওয়া যায়। অর্থাৎ যদি কোন অপেক্ষক y থেকে J সমাকলনের সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়, তবে কাছাকাছি অন্য যে-কোন y অপেক্ষকের জন্যে J-এর মান বৃদ্ধি পাবে।

এর জন্যে আমরা y অপেক্ষকের একটা পরিবর্তী রাশি ভিত্তিক প্রতিবৃত্তি নিতে পারি অর্থাৎ y অপেক্ষককে একটি পরিবর্তী রাশি α-এর উপর নির্ভরশীল করতে পারি,

$$y = y(\alpha, x) \qquad (৩.২)$$

অবশ্য α রাশির মান শূন্য হলে আমাদের পূর্বের অপেক্ষক $y(x)$ ফিরে পাওয়া যায়,

$$y(x) = y(0, x)$$

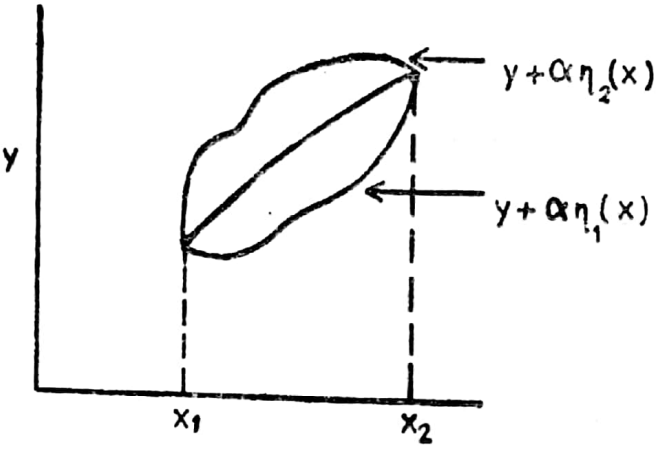
সুতরাং আমরা লিখতে পারি,

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x) \qquad (৩.৩)$$

এখানে $\eta(x)$ একটি অপেক্ষক যা x_1 এবং x_2 প্রান্তদ্বয়ে শূন্য

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \qquad (৩.৪)$$

এটা নিচের ছবিতে দেখানো হয়েছে,



চিত্র : ৩.১

এভাবে J সমাকলন পরিবর্তী রাশি α-এর অপেক্ষক হয়ে যায়,

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\,[y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x]\,dx \qquad (৩.৫)$$

এখন J সমাকলনের স্থির অথবা পরম মান আছে এই শর্তের ফলে J সমাকলন প্রথম আসন্ন-মান পর্যন্ত α নিরপেক্ষ হবে অর্থাৎ যে কোন $\eta(x)$ অপেক্ষকের জন্য,

$$\left.\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \qquad (৩.৬)$$

উদাহরণ ৩.১

উদাহরণস্বরূপ, $y = x$ এই সরলরেখার সমীকরণ নেয়া যায়। এটা মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষরেখার সঙ্গে ৪৫° ডিগ্রি কোণ করে। এখন দেখানো

যায় যে সমাকলন,

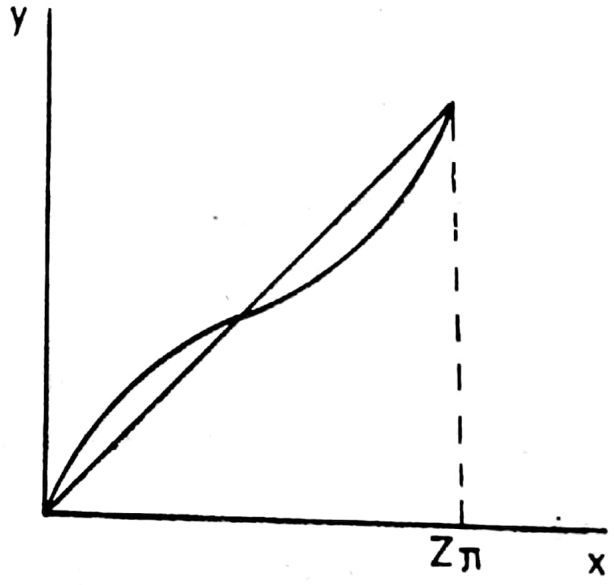
$$J = \int_0^{2\pi} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

সর্বনিম্ন মানের। সংজ্ঞানুসারে আমরা কাছাকাছি একটি পথ এভাবে তৈরি করতে পারি,

$$y(\alpha, x) = x + \alpha \sin x$$

অর্থাৎ

$$\eta(x) = \sin x$$



চিত্র : ৩.২

এবং সীমান্ত শর্তানুসারে

$$\eta(0) = \eta(2\pi) = 0$$

সুতরাং আমরা পাই,

$$J(\alpha) = \int_0^{2\pi} [\,1 + 2\alpha \cos x + \alpha^2 \cos^2 x\,]\, dx$$

$$= 2\pi + \pi\alpha^2$$

অর্থাৎ $J(\alpha)$ সব সময়েই $J(0) = 2\pi$ মানের বেশি, α রাশির মান যাই হোক না কেন। অতএব $J = J(0)$ সমাকলন সর্বনিম্নমানের।

৩·২ অয়লার সমীকরণ

সমীকরণ (৩.৬) থেকে আমরা পাই,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f(y, \acute{y}\,;\, x)\, dx = 0 \qquad (৩.৭)$$

যেহেতু প্রান্তবিন্দুদ্বয় স্থির, তাই আমরা কেবল সমাকলনের অপেক্ষক f কে অন্তরকলন করি। এভাবে পাওয়া যায়,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \acute{y}} \frac{\partial \acute{y}}{\partial \alpha} \right] dx = 0 \qquad (৩.৮)$$

এখন দ্বিতীয় অংশকে আমরা আংশিকভাবে সমাকলন করি,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \acute{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha}\, dx = \left[\frac{\partial f}{\partial \acute{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \acute{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right] dx \qquad (৩.৯)$$

যেহেতু

$$y = y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha \eta(x)$$

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

তাই আমরা পাই,

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x) \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{x_1} = \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{x_2} = 0$$

অতএব (৩.৮) সমীকরণ থেকে এবং (৩.৯) ব্যবহার করে লেখা যায়,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\right] \eta(x)\, dx = 0 \qquad (৩.১০)$$

যেহেতু $\eta(x)$ একটি সম্পূর্ণ অনির্ধারিত অপেক্ষক, তাই এই সমীকরণ সার্থক করতে হলে আমাদের প্রয়োজন

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (৩.১১)$$

এটাকেই বলে 'অয়লারের সমীকরণ'। J সমাকলনের পরম মানের জন্যে এই সমীকরণ সার্থক করা দরকার।

উদাহরণ ৩.২

উদাহরণস্বরূপ, একটা বক্ররেখার ক্ষুদ্রাংশ নেয়া যায়,

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

সুতরাং দুটি বিন্দুর মধ্যে বক্ররেখার মোট দৈর্ঘ্য হল,

$$J = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \dot{y}^2}$$

এই দুই বিন্দুর মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ধারণ করতে হলে J-এর মান সর্বনিম্ন হওয়া প্রয়োজন। এখন যেহেতু এক্ষেত্রে

$$f = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$$

তাই

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$$

সুতরাং অয়লার সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$\frac{d}{dx}\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = 0$$

অতএব

$$\frac{\acute{y}}{\sqrt{1+\acute{y}^2}} = \text{ধ্রুব সংখ্যা} = a$$

অর্থাৎ

$$\acute{y} = m \qquad m = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$$

এবং x'র সাপেক্ষে সমাকলন করে আমরা পাই,

$$y = mx + c$$

সুতরাং দ্বিমাত্রিক তলে দুটি বিন্দুর মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব হল বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী সরলরেখা।

যদি f অপেক্ষক x এর উপর প্রত্যক্ষভাবে নির্ভর না করে তবে আমরা লিখতে পারি,

$$\frac{df}{dx} - \frac{d}{dx}\left(\acute{y}\frac{\partial f}{\partial \acute{y}}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\acute{y} + \frac{\partial f}{\partial \acute{y}}\acute{y}' - \acute{y}'\frac{\partial f}{\partial \acute{y}} - \acute{y}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \acute{y}}\right)$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \acute{y}}\right)\right]\acute{y}$$

সুতরাং (৩.১১) সমীকরণ থেকে লেখা যায়,

$$\frac{d}{dx}\left[f - \acute{y}\frac{\partial f}{\partial \acute{y}}\right] = 0$$

অর্থাৎ যখন f প্রত্যক্ষভাবে x-এর উপর নির্ভরশীল নয়, তখন

$$f - \acute{y}\frac{\partial f}{\partial \acute{y}} = \text{ধ্রুব রাশি} \qquad (৩.১২)$$

এটাও অয়লার সমীকরণের আর একটি প্রয়োজনীয় প্রকাশ।

উদাহরণ ৩.৩

উদাহরণস্বরূপ আমরা জিওডেসিক বা বিশ্ব-বক্ররেখা আলোচনা করতে পারি। যে কোন পৃষ্ঠের দুটি বিন্দুর মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্বকে বলে জিওডেসিক। একটা বর্তুলের পৃষ্ঠ নেয়া যায়। গোলকের উপরের তলে ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য এভাবে লেখা যায়,

$$ds^2 = (dR)^2 + (Rd\theta)^2 + (R\sin\theta\, d\varphi)^2$$

$$= R^2\left[(d\theta)^2 + \sin^2\theta\,(d\varphi)^2\right]$$

এখানে গোলকের ব্যাসার্ধ R ধ্রুব। সুতরাং

$$s = R\int_1^2 \left[\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 + \sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}} d\varphi$$

অতএব এক্ষেত্রে f অপেক্ষক

$$f = \sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta}\ , \quad \theta' = \frac{d\theta}{d\varphi}\ .$$

অর্থাৎ f পরিবর্তী রাশি φ-এর উপর নির্ভর করে না। সুতরাং ৩.১২ সমীকরণ ব্যবহার করে লেখা যায়,

$$\sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta} - \theta'\frac{\partial}{\partial\theta'}\sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta} = a$$

যেখানে a একটি ধ্রুব রাশি। অতএব

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{a\,\mathrm{cosec}^2\theta}{\sqrt{1 - a^2\,\mathrm{cosec}^2\theta}}$$

সমাকলন করে,

$$\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{\cot\theta}{\beta}\right) + \alpha \qquad (৩.১৩)$$

যেখানে α একটি ধ্রুব রাশি এবং $\beta^2 = (1 - a^2)/a^2$ ।

অতএব

$$\cos\theta = \beta\,(\sin\theta\,\sin\varphi\,\cos\alpha - \sin\theta\,\cos\varphi\,\sin\alpha)$$

কিন্তু বর্তুল স্থানাঙ্কে,

$$x = R \sin\theta \cos\varphi \quad y = R \sin\theta \sin\varphi \quad z = R \cos\theta$$

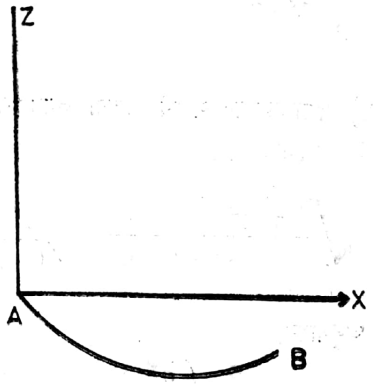
সুতরাং

$$z = \beta (y \cos\alpha - x \sin\alpha) = A_y - B_x, \text{ যেখানে } A = \beta \cos\alpha \text{ ও}$$
$$B = \beta \sin\alpha$$

এই সমীকরণ বর্তুলের কেন্দ্রের মধ্য দিয়ে যাওয়া একটি তলের সমীকরণ। গোলকের পৃষ্ঠদেশের সঙ্গে উক্ত তলের সংযোগরেখা একটা বৃহৎ বৃত্ত (গ্রেট সার্কল)। সুতরাং বর্তুলের উপরে জিওডেসিক হল একটি বৃহৎ বৃত্ত।

উদাহরণ ৩.৪

আর একটি উল্লেখযোগ্য উদাহরণ হল ব্রাকিস্টোক্রোন বা ক্ষুদ্রতম সময়ের সমস্যা। ঘর্ষণহীনভাবে অভিকর্ষের অধীনে একটি বস্তুকণা নিচের দিকে গড়িয়ে পড়লে তার গতিপথ কি হবে? ঐ পথ আমরা নির্ধারণ করতে চাই এই শর্তের অধীনে যে নিচে নামার সময় হবে সর্বনিম্ন। ধরা যাক বস্তুকণাটি A থেকে B বিন্দুতে নামে।



চিত্র : ৩.৩

ধরা যাক ACB আমাদের উদ্দিষ্ট পথ, অর্থাৎ যে পথে স্বল্পতম সময়ে কণিকাটি B'তে নেমে আসে। এই পথের ক্ষুদ্র অংশ ds বিবেচনা করি। এই 'ds' পথ অতিক্রম করতে, ধরা যাক, dt সময় লাগে। যদি বস্তুকণার গতিবেগ v হয়

তাহলে $v = ds/dt$। সুতরাং A থেকে B'তে নিচে নামার সামগ্রিক সময় হল,

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v}$$

এখন u যদি বস্তুকণার প্রাথমিক গতিবেগ হয় তাহলে,

$$v^2 = u^2 - 2gz$$

আবার

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2} = \sqrt{1 + q^2}\ dz$$

যেখানে

$$q = \frac{dx}{dz}$$

অর্থাৎ q ACB বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে নতির বিপরীত রাশি। সুতরাং

$$t = \int_A^B \frac{\sqrt{1 + q^2}}{\sqrt{u^2 - 2gz}}\ dz$$

এই সমীকরণকে (৩.১) সমীকরণের সাথে তুলনা করে আমরা দেখি যে এখানে (৩.১১) সমীকরণের f অপেক্ষক হল

$$f(O, q; z) = \sqrt{\frac{1 + q^2}{u^2 - 2gz}}\ ; \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{q}{\sqrt{(1 + q^2)(u^2 - 2gz)}}$$

সুতরাং উক্ত সমীকরণ অনুসারে,

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right) = 0$$

অথবা

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{q}{\sqrt{(1 + q^2)(u^2 - 2gz)}}\right) = 0$$

সমাকলন করে,

$$\frac{q}{\sqrt{(1+q^2)(u^2-2gz)}} = \text{ধ্রুব রাশি} = c$$

সুতরাং

$$q^2 = \frac{a-z}{b+z}$$

যেখানে

$$a = u^2/2g \qquad b = \frac{1}{2gc^2} - a$$

অতএব $q = \frac{dx}{dz}$ থেকে

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{\frac{a-z}{b+z}}$$

এখন আমরা লিখতে পারি

$$z + b = \frac{a+b}{2}(1-\cos\theta)$$

সুতরাং সমাকলন করে,

$$x + d = \frac{a+b}{2}(\theta+\sin\theta)$$

যেখানে d একটি ধ্রুব রাশি। আমরা জানি যে স্থানাঙ্কের সমীকরণদ্বয়

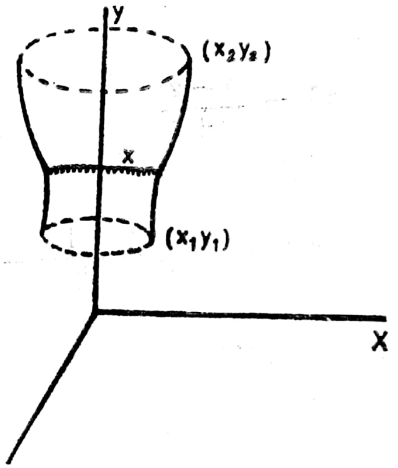
$$x+d = \frac{a+b}{2}(\theta+\sin\theta) \qquad z+b = \frac{a+b}{2}(1-\cos\theta)$$

একটি সাইক্লয়েডের প্যারামেট্রিক বা পরিবর্তী রাশি ভিত্তিক সমীকরণ। সুতরাং ব্রাকিস্টোক্রোন বক্ররেখা একটি সাইক্লয়েড।

উদাহরণ ৩.৫

সর্বশেষ উদাহরণ হিসেবে দুটি বিন্দুর সংযোগকারী বক্ররেখাকে ঘুরিয়ে যে পৃষ্ঠদেশ সৃষ্টি হয় তা বিবেচনা করা যায়। ধরা যাক স্থির বিন্দুদ্বয় হল (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) এবং এদের সংযোগকারী বক্ররেখাকে y-অক্ষরেখার

চারদিকে ঘুরিয়ে একটি পৃষ্ঠতল সৃষ্টি করা হল। যে বক্ররেখার জন্যে পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল সর্বনিম্ন হবে তা নির্ধারণ করা প্রয়োজন।



চিত্র ৩.৪

এখন পৃষ্ঠতলের ক্ষুদ্র অংশের ক্ষেত্রফল হল পরিধি এবং পুরুত্বের গুণফল অর্থাৎ $2\pi x\ ds$ যেখানে

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

সুতরাং মোট ক্ষেত্রফল হল

$$J = 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

এখানে f অপেক্ষক হল

$$f = x\sqrt{1+y'^2}$$

সুতরাং (৩.১১) সমীকরণ থেকে,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

অর্থাৎ

$$\frac{x\,y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{ধ্রুব রাশি} = a$$

এবং

$$y' = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

সমাকলন করে,

$$y = a\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + b$$

সুতরাং ঈপ্সিত বক্ররেখার সমীকরণ হল

$$x = a\cosh\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

যাকে 'ক্যাটিনারি'-র সমীকরণ বলে।

এ পর্যায়ে উল্লেখ করা যায় যে আমরা y অপেক্ষককে α-রাশির উপর নির্ভরশীল করে লিখেছি,

$$y(\alpha, x) = y(x) + \alpha\eta(x)$$

অর্থাৎ পরিবর্তনশীল অপেক্ষকের একটি গোটা পরিবারের সংজ্ঞা দিয়েছি যা একটি রাশি α-র উপর নির্ভর করে এবং যা $y(x)$ অপেক্ষকের খুবই কাছাকাছি প্রতিবেশী। সুতরাং δy পরিবর্তনের অন্তরকলন এভাবে লেখা যায়,

$$\frac{d}{dx}(\delta y) = \frac{d}{dx}\alpha\eta = \alpha\eta'$$

অন্যদিকে অন্তরকলনের পরিবর্তন হল,

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = y'(\alpha, x) - y' = y' + \alpha\eta' - y' = \alpha\eta'$$

সুতরাং পরিবর্তনের অন্তরকলন δy এবং অন্তরকলনের পরিবর্তন $\delta(y')$ সমান,

$$\delta y' = \frac{d}{dx}(\delta y) \qquad (২.১৪)$$

এখন J সমাকলনের পরিবর্তন সংজ্ঞানুসারে লেখা যায়,

$$\delta J = \frac{\delta J}{\delta \alpha}\alpha\Big|_{\alpha=0} = \alpha \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right) dx$$

$$= \alpha \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'\right) dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right) dx$$

দ্বিতীয় অংশটিকে আংশিক সমাকলন করে, আমরা পাই

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' \, dx = \left[\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y \, dx$$

যেখানে (৩.১৪) সমীকরণ ব্যবহার করা হয়েছে। যেহেতু $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$ (কেননা x_1 এবং x_2 দুটি স্থির বিন্দু), অতএব

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \delta y \, dx$$

এখন J সমাকলনের পরিবর্তন δJ শূন্য অর্থাৎ J স্থির থাকে, যদি

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

এই পদ্ধতিতে অয়লার-লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ নির্ধারণকে 'সরাসরি পরিবর্তন পদ্ধতি' বলে।

৩.৩ হ্যামিল্টনের নীতি এবং লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ নির্ধারণ

১৮৩৪-৩৫ খ্রীস্টাব্দে দুটি বিখ্যাত প্রবন্ধ প্রকাশ করে হ্যামিল্টন 'পরিবর্তন পদ্ধতির' উপর ভিত্তি করে বলবিদ্যার একীভূত আলোচনার গোড়াপত্তন করেন। তিনি নিম্নলিখিত নীতি প্রবর্তন করেছিলেন,

"কোন গতিময় বস্তুনিচয়ের সম্ভাব্য পথগুলির মধ্যে যে পথটি বাস্তবিকই অনুসৃত হয় তার জন্যে লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষকের সময়ের উপর সমাকলনের মান সর্বনিম্ন।"

পরিবর্তন অন্তরকলন অনুসারে, হ্যামিল্টনের নীতি এভাবে লেখা যায়,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = 0 \qquad (৩.১৫)$$

যেখানে 'লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হল,

$$L = T - U \qquad (৩.১৬)$$

T এবং U যথাক্রমে গতিশক্তি ও বিভবশক্তি অপেক্ষক। লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক সাধারণ স্থানাঙ্ক q_i (t), সাধারণ গতিবেগ $\dot{q}_i$ (t), এবং সময়ের উপর নির্ভরশীল,

$$L = L (\dot{q}_i , q_i ; t) \qquad (৩.১৭)$$

সুতরাং (৩.১৫) সমীকরণে সরাসরি পরিবর্তন পদ্ধতি প্রয়োগ করে লেখা যায়,

$$\sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0 \qquad (৩.১৮)$$

কিন্তু (৩.১৪) সমীকরণ অনুসারে,

$$\delta \left(\frac{dq}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\delta q)$$

সুতরাং (৩.১৮) সমীকরণের দ্বিতীয় অংশ আংশিক সমাকলন করে লেখা যায়,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \, dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \partial q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \, dt$$

এখানে সমাকলিত অংশ শূন্য কেননা t_1 এবং t_2 স্থির বিন্দুতে δq_i পরিবর্তন শূন্য। সুতরাং হ্যামিলটনের নীতি অনুসারে,

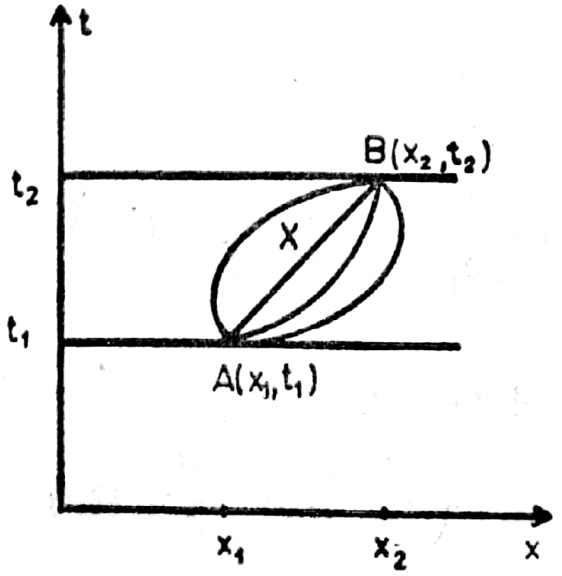
$$\sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i \, dt = 0$$

সুতরাং অবাধ পরিবর্তন δq_i এর জন্যে আমরা পাই,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, 2, ,\ldots n$$

এই n সমীকরণ হল অয়লার-লাগ্রাঞ্জ গতিসমীকরণ। এখানে n হল স্বাধীনতার মাত্রার সংখ্যা অর্থাৎ প্রতিটি স্বাধীন সাধারণ স্থানাঙ্ক q_i -এর জন্যে একটি করে লাগ্রাঞ্জ গতিসমীকরণ পাওয়া যায়।

চিরায়ত বলবিদ্যায়, এই লাগ্রাঞ্জীয় পদ্ধতি গতিসমীকরণ নির্ধারণ করার একটা সহজ উপায়। ধরা যাক আমরা কোন বস্তুকণার x অক্ষরেখার দিকে একমাত্রিক গতি বিবেচনা করছি। বস্তুকণাটি দেশ-কাল বিন্দু $A(t_1, x_1)$ থেকে দ্বিতীয় দেশ-কাল বিন্দু $B(t_2, x_2)$ অভিমুখে গতিশীল অর্থাৎ t_1 সময়ে তার অবস্থান x_1 এবং



চিত্র : ৩.৫

t_2 সময়ে তার অবস্থান x_2। প্রশ্ন হল A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে যাওয়ার চিরায়ত গতিবিদ্যার পথটি কেমন করে নির্ধারণ করব? হ্যামিলটনীয় নীতিতে এই প্রশ্নেরই উত্তর দেয়া হয়েছে।

প্রথমতঃ আমরা দুই পরিবর্তী রাশি নির্ভর একটি অপেক্ষক $L(x, \dot{x})$ নেই। এটাকেই বলে লাগ্রাঞ্জীয় অপেক্ষক। বস্তুকণার প্রতিটি পথের জন্যে আমরা একটি রাশির সংজ্ঞা দেই,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x})\, dt$$

এই রাশিকে বলা হয় ঐ পথের এক্‌শন বা ক্রিয়া। আমরা পথ $x = x(t)$ এমন-ভাবে নিতে চাই যাতে এই ক্রিয়া পরম মানের হয় অর্থাৎ সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের হয়। ধরা যাক $x = x(t)$ পথটি ক্রিয়ার পরম মান দেয়। অন্য একটি পথ নেয়া যায়, যেখানে

$$x = x(t) + \alpha\eta(t) \qquad \eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$$

আমরা α রাশি পরিবর্তন করব কিন্তু $\eta(t)$ রাশিকে স্থির রাখব। এখন

$$S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L\left[x(t) + \alpha\eta(t),\ \dot{x} + \alpha\dot{\eta}\right] dt$$

অর্থাৎ S এখন α রাশির অপেক্ষক এবং $\alpha = 0$ মানের জন্যে S অপেক্ষকের পরম মান (এক্সট্রিমাম) থাকবে। অতএব

$$0 = \frac{\delta S}{\delta \alpha}\bigg|_{\alpha = 0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x}\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}(t)\right] dt$$

$$= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\eta(t)\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right]\eta(t)\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right]\eta(t)\, dt$$

এখানে আমরা প্রান্তিক শর্ত $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ ব্যবহার করেছি। কিন্তু $\eta(t)$ একটি যে কোন ভাবে পছন্দ করা অপেক্ষক। সুতরাং উপরের অভেদটি সঙ্গত হবে যদি $x = x(t)$ নিচের সমীকরণ সার্থক করে,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

উদাহরণ ৩.৬

উদাহরণস্বরূপ আমরা $V(x)$ বিভব অপেক্ষকের অধীন একটি বস্তুকণার একমাত্রিক গতি বিবেচনা করতে পারি। লাগ্রাঞ্জীয় অপেক্ষক এমনভাবে পছন্দ করতে হবে যাতে নিউটনীয় গতিসমীকরণ অক্ষুন্ন থাকে। নিউটনের গতিসূত্র থেকে আমরা জানি,

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

এই সমীকরণ অব্যাহত রাখতে হলে, লাগ্রাঞ্জীয় অপেক্ষক এভাবে লেখা প্রয়োজন,

$$L(x, \dot{x}) = \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2 - V(x)$$

কেননা

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

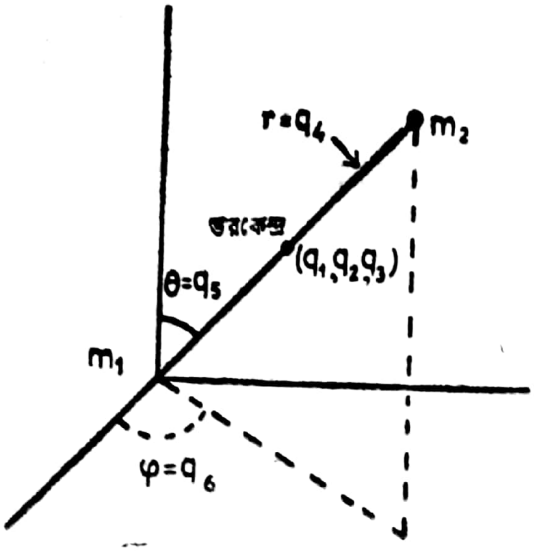
এবং তারপর অয়লার-লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ ব্যবহার করে আমরা সহজেই পাই

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

অর্থাৎ নিউটনের গতিসমীকরণ ঐ লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক থেকে নির্ধারণ করা যায়। স্পষ্টত লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক বস্তুকণার গতিশক্তি এবং বিভবশক্তির পার্থক্য।

এই পদ্ধতি জটিল বস্তুনিচয়ের জন্যে সহজেই প্রসারিত করা যায়। ধরা যাক আমাদের বস্তুনিচয়ের সাধারণীকৃত স্থানাঙ্কগুলি হল $q_1, \ldots q_n$। উদাহরণস্বরূপ, আমাদের দুটি বস্তুকণা থাকলে (চিত্র ৩.৬) তাদের ভরকেন্দ্রের কার্টেশীয় স্থানাঙ্ক হবে (q_1, q_2, q_3) এবং দুটি বস্তুর সংযোগকারী রেখার বর্তুলকের স্থানাঙ্ক হবে (q_4, q_5, q_6)। বস্তুকণার সাধারণ স্থানাঙ্কগুলি দিয়ে বিন্যাস-জগৎ (কনফিগারেশন স্পেস) সৃষ্টি হয়। বিন্যাস-জগতে বস্তুনিচয়ের গতিময় বিবর্তন পাওয়া যাবে

$q_i = q_i(t)$ এই বক্ররেখা দিয়ে। এখন আমরা একটি লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক প্রবর্তন করি যা q_i , $\dot{q}_i$ এবং সময়ের উপর নির্ভর করে।



চিত্র : ৩.৬

তারপরে $A(t_1, q_1^1, \ldots q_n^1)$ এবং $B(t_2, q_1^2, \ldots q_n^2)$ দুই বিন্দুর সংযোগকারী পথগুলি বিবেচনা করতে পারি। ঐ প্রত্যেকটি পথের সঙ্গে আমরা নিম্নের ক্রিয়া অপেক্ষক জড়িত করি,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (q_i , \dot{q}_i , t)\, dt$$

এবং তারপর আমরা এমন একটি পথ $q_i = q_i(t)$ নির্ধারণ করি যার জন্যে ঐ ক্রিয়া রাশির মান হয় পরম। ধরা যাক উক্ত উদ্দিষ্ট পথের কাছাকাছি পথটি হল

$$q_i = q_i(t) + \alpha_i \eta(t) \qquad \eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$$

যেখানে α_i একটি পরিবর্তী রাশি। সুতরাং 'ক্রিয়া-অপেক্ষক' S এখন α_i-রাশির উপর নির্ভরশীল,

$$S(\alpha_i) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \alpha_i \eta, \dot{q}_i + \alpha_i \dot{\eta}, t)\, dt$$

সুতরাং

$$0 = \left.\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}\right|_{\alpha_i = 0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}i}\dot{\eta}\right] dt$$

দ্বিতীয় অংশের আংশিক সমাকলন করে, আমরা পাব,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}i}\right)\right] \eta \, dt = 0$$

যেহেতু এই সমীকরণ যে-কোন η-অপেক্ষকের জন্য সার্থক, তাই

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

সুতরাং প্রতিটি স্বাধীনতা-মাত্রার জন্যে একটি করে অয়লার-লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ লেখা যায়।

উদাহরণ ৩.৭

উদাহরণস্বরূপ, ত্রিমাত্রিক জগতে বস্তুকণার লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক এভাবে লেখা যায়,

$$L\left(\underline{r}, \underline{v}, t\right) = \tfrac{1}{2} m \underline{v}^2 - V\left(\underline{r}\right)$$

সুতরাং অয়লার-লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$\frac{d}{dt}\left(m\underline{v}\right) + \underline{\nabla} V\left(\underline{r}\right) = 0$$

যা অবশ্যই আমাদের অতিপরিচিত নিউটনীয় গতিসমীকরণ,

$$m\ddot{\underline{r}} = -\underline{\nabla} V\left(\underline{r}\right) = \underline{F}$$

উদাহরণ ৩.৮

আর একটি উদাহরণ হিসেবে আমরা বিদ্যুৎ-চৌম্বক ক্ষেত্রে একটি আধানযুক্ত বস্তুকণার গতি বিবেচনা করতে পারি। ম্যাক্সওয়েলের বিদ্যুৎ চৌম্বক তত্ত্ব থেকে আমরা জানি, আহিত বস্তুকণার গতিসমীকরণ হল

$$m\ddot{\underline{r}} = e\left(\underline{E} + \frac{1}{c}\underline{v} \times \underline{B}\right)$$

যেখানে $\underline{E}$ এবং $\underline{B}$ হল যথাক্রমে বিদ্যুৎ ও চৌম্বক ক্ষেত্র-প্রাখর্য। এই সমীকরণের ডানদিকের অংশকে বলে 'লোরেন্স বল'। এখানে e হল বস্তুকণার আধান এবং c আলোকের গতিবেগ। আমরা $\underline{E}$ এবং $\underline{B}$ সদিক রাশির পরিবর্তে অন্য দুটি রাশি φ এবং $\underline{A}$ নিতে পারি।

$$\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$$

$$\underline{E} = - \underline{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underline{A}$$

এই রাশি দুটিকে বলে নির্দিক বিভব (φ) এবং সদিক বিভব ($\underline{A}$)। সুতরাং

$$m \ddot{\underline{r}} = e \left[- \underline{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underline{A} + \frac{1}{c} \underline{v} \times (\underline{\nabla} \times \underline{A}) \right]$$

$$= e \left[- \underline{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underline{A} + \frac{1}{c} \{ \underline{\nabla} (\underline{v} . \underline{A}) - \underline{v} . \underline{\nabla} \} \underline{A} \right]$$

$$= c \left[- \underline{\nabla} (\varphi - \frac{1}{c} \underline{v} . \underline{A}) - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \underline{A} \right]$$

যেহেতু বিভব φ গতিবেগ $\underline{v}$ এর উপর নির্ভর করে না, তাই

$$\underline{A} = \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \underline{v} . \underline{A} = \frac{\partial}{\partial \underline{v}} (\underline{v} . \underline{A} - c \varphi)$$

সুতরাং

$$m \ddot{\underline{r}} = - \underline{\nabla} U + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \underline{v}} U$$

যেখানে আমরা বিদ্যুৎ-চৌম্বক ক্ষেত্রের জন্য একটি নতুন অপেক্ষক U-এর সংজ্ঞা দিয়েছি।

$$U (\underline{r}, \underline{v}, t) = e (\varphi - \frac{1}{c} \underline{v} . \underline{A})$$

স্পষ্টতই বিদ্যুৎ-চৌম্বক ক্ষেত্রে বস্তুকণার লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক লেখা যায় এভাবে,

$$L (\underline{r}, \underline{v}, t) = \tfrac{1}{2} m \underline{v}^2 - U \underline{r}, \underline{v}, t)$$

কেননা তাহলেই অয়লার-লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\frac{d}{dt}\left(m\underline{v} - \frac{\partial U}{\partial \underline{v}}\right) + \underline{\nabla} U = 0$$

যা আমাদের পূর্বের ম্যাক্সওয়েল-লোরেন্স সমীকরণ। সুতরাং একটি আধানযুক্ত বস্তুকণা বিদ্যুৎ-চৌম্বক ক্ষেত্রে স্থাপন করলে তার লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হবে,

$$L(\underline{r}, \underline{v}, t) = \tfrac{1}{2} m \underline{v}^2 - e\varphi + \frac{e}{c}\,\underline{v} \cdot \underline{A}$$

আসলে বিদ্যুৎ-চৌম্বকের উপস্থিতি না থাকলে, ক্রিয়া-অপেক্ষক হল

$$S_0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\tfrac{1}{2} m \underline{v}^2 - V(\underline{r})\right) dt$$

কিন্তু $(\varphi, \underline{A})$ বিভবের বিদ্যুৎ-চৌম্বক ক্ষেত্র আরোপ করলে, আর একটি অংশ ক্রিয়া অপেক্ষকে এসে যায় যাকে বিক্রিয়ার অংশ বলা যায়,

$$S_1 = -e \int_{t_1}^{t_2} \left[\varphi - \frac{1}{c}\,\underline{v} \cdot \underline{A}\right] dt$$

এবং এ দুটো মিলেই সামগ্রিক ক্রিয়া অপেক্ষকের সংজ্ঞা দেয়া যায়, আর এভাবেই লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষকের উল্লিখিত প্রকাশ পাওয়া যায়।

এখন বিদ্যুৎ-চৌম্বক ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত রূপান্তর করলে তা অপরিবর্তী থাকে,

$$\underline{A} \to \underline{A}' = \underline{A} + \underline{\nabla}\,\Lambda$$

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

যেখানে Λ একটি নির্দিক অপেক্ষক $\Lambda = \Lambda(\underline{r}, t)$। সহজেই দেখানো যায় যে এই রূপান্তরের অধীনে $\underline{B}$ এবং $\underline{E}$ অপরিবর্তী থাকে। একেই বলে মাপ

অপরিবর্তনের নীতি (গেজ ইনভ্যারিয়ান্স)। বিক্রিয়ার অংশ S_1-কে লেখা যায়,

$$S_1 = e \int_A^B \left[-\varphi \, dt + \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{3} A_i \, dx_i \right]$$

$$= \frac{e}{c} \sum_{\mu=1}^{4} \int_A^B A_\mu \, dx_\mu$$

যেখানে $A_4 = i\varphi$ এবং $x_4 = ict$ লেখা হয়েছে। বিদ্যুৎ-চৌম্বক ক্ষেত্রের মাপ রূপান্তরের দুটি সমীকরণকে একত্র করে লেখা যায়,

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu} \qquad \mu = 1, 2, 3, 4$$

এই রূপান্তর S_1 অপেক্ষকের উপর আরোপ করে আমরা পাই,

$$S'_1 = \frac{e}{c} \sum_{\mu} \int_A^B A'_\mu \, dx_\mu$$

$$= \frac{e}{c} \sum_{\mu} \int_A^B \left(A_\mu \, dx_\mu + d\Lambda \right)$$

$$= S_1 + \frac{e}{c} \left[\Lambda(B) - \Lambda(A) \right]$$

কিন্তু ডানদিকের দ্বিতীয় অংশ $\Lambda(B) - \Lambda(A)$ বিশেষ কোন পথের উপর নির্ভর করে না। শুধু প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের উপর তা নির্ভরশীল। সুতরাং যে কোন পথের জন্যেই বিক্রিয়া-রাশি S_1-এর পরিবর্তন একই। কিন্তু বস্তুকণার যে পথ লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ সার্থক করে সেই পথের জন্যে সামগ্রিক ক্রিয়ার মান এখনও আগের মতই পরম। অতএব নির্ধারিত লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক মাপ-অপরিবর্তনের নীতি মেনে চলে।

কণা-পদার্থবিজ্ঞানে—বিশেষ করে গ্ল্যাসহাও-সালাম-ভাইনবার্গ তত্ত্বে—এই মাপ অপরিবর্তনের নীতির ব্যাপক প্রয়োগ আজকাল করা হয়।

৩.৪ সীমাবদ্ধতার শর্তসহ লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ

অয়লার-লাগ্রাঞ্জ গতিসমীকরণ নির্ধারণের সময়ে সাধারণ স্থানাঙ্ক q_i-এর পরস্পর স্বাতন্ত্র্য শুধু শেষে ব্যবহার করা হয়। যদি পরিবর্তন δq_i গুলি পরস্পর নিরপেক্ষ না হয়, তাহলে তাদের মধ্যে সংযোগকারী সমীকরণ এ ধরনের হবে,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \delta q_j = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, l \qquad (৩.১৯)$$

অর্থাৎ আমাদের l সংখ্যক সমীকরণ δq_j পরিবর্তনের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকবে, যেমন হলোনমিক শর্ত লেখা হয়,

$$f_i\,(q_1, \ldots q_n;\, t) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, l$$

যা থেকে আমরা পাই,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial q_j}\, dq_j + \frac{\partial f_i}{\partial t}\, dt = 0$$

(৩.১৯) সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে,

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \qquad a_{it} = \frac{\partial f_i}{\partial t}$$

এ ধরনের শর্তের অধীনে আমরা q_i স্থানাঙ্কগুলির $n-l$ সংখ্যক স্থানাঙ্ক পরস্পর নিরপেক্ষ নিতে পারি এবং বাকি l সংখ্যক স্থানাঙ্ক q_i (৩.১৯) সমীকরণ দিয়ে নির্ধারণ করতে পারি। অর্থাৎ $q_1, q_2, \ldots q_{n-l}$ স্থানাঙ্কগুলি স্বতন্ত্র এবং $q_{n-l+1} \ldots, q_l$ স্থানাঙ্ক পরস্পর নির্ভরশীল। (৩.১৯) সমীকরণ অন্তর্ভুক্ত করার জন্য আমরা লাগ্রাঞ্জের অনির্ধারিত গুণক পদ্ধতি ব্যবহার করতে পারি। (৩.১৮) সমীকরণকে λ_i দিয়ে গুণ করে এবং i সূচকের উপর যোগ করে,

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i\, a_{ij}\, \delta q_j = 0 \qquad (৩.২০)$$

কিন্তু অন্যদিকে হ্যামিল্টনের ক্ষুদ্রতম ক্রিয়ার নীতি থেকে আমরা পাই,

$$\sum_j \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right] \delta q_j \, dt = 0 \qquad (৩.২১)$$

সুতরাং (৩.২০) এবং (৩.২১) সমীকরণ যোগ করে আমরা পাই,

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right] + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_{ij} \right\} \delta q_j \, dt = 0 \quad (৩.২২)$$

এখন আমরা λ_i গুলি এমনভাবে পছন্দ করতে পারি যাতে $j = n-l+1, \ldots, n$ মানের জন্য

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_{ij} = 0 \quad j = n-l+1, \ldots, n \quad (৩.২৩)$$

এভাবে λ_i নির্ধারণ করে নেয়ার পর আমরা (৩.২২) সমীকরণ লিখতে পারি,

$$\sum_{j=1}^{n-l} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right] + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_{ij} \right\} \delta q_j \, dt = 0 \quad (৩.২৪)$$

কিন্তু এখন $n-l$ সংখ্যক q_i স্থানাঙ্কগুলি সকলই স্বতন্ত্র। সুতরাং (৩.২৪) সমীকরণ সার্থক হয় যখন,

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_{ij} = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n-l \quad (৩.২৫)$$

স্পষ্টতই (৩.২৩) এবং (৩.২৫) সমীকরণদ্বয় একত্র করে আমরা লিখতে পারি যে j সূচকের সব মানের জন্যই,

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_{ij} = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n \quad (৩.২৬)$$

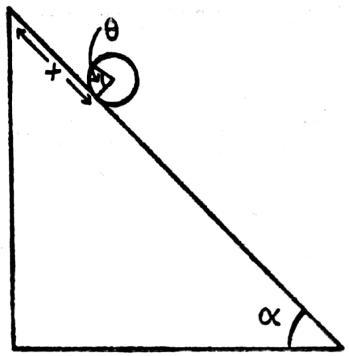
সীমাবদ্ধতার শর্ত এভাবে অয়লার-লাগ্রাঞ্জ সমীকরণে অন্তর্ভুক্ত করা যায়।

171055

উদাহরণ ৩.৯

একটি আনত তলে একটি চাকতি ঘুরতে ঘুরতে পড়ছে। তলের শেষ প্রান্তে তার গতিবেগ নির্ধারণ কর।

সমাধান



চিত্র : ৩.৭

এই বস্তুনিচয় বর্ণনা করার জন্যে x এবং θ স্থানাঙ্কের প্রয়োজন (চিত্র ৩.৭) এবং এ দুটিই এক্ষেত্রে সাধারণ স্থানাঙ্ক। চাকতির ব্যাসার্ধ R হলে, $x = R\theta$ এবং সীমাবদ্ধতার সমীকরণ হল

$$f(x, \theta) = x - R\theta = 0$$

গতিশক্তি হল

$$T = \tfrac{1}{2} M \dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

যেখানে M চাকতির ভর এবং I তার জড়ত্বের মোমেন্ট (চাকতির অক্ষের সাপেক্ষে অর্থাৎ $I = \frac{1}{2} M R^2$)। তার বিভবশক্তি হল

$$V = Mg(l - x) \sin \alpha$$

যেখানে আনত তলের দৈর্ঘ্য l। সুতরাং লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হল

$$L = \tfrac{1}{2} M \dot{x}^2 + \tfrac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 - Mg(l - x) \sin \alpha$$

অতএব লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \lambda \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0$$

যেখানে $q_1 = x$ এবং $q_2 = \theta$ আমাদের দুটি গতিসমীকরণ দেয়,

$$Mg \sin \alpha - M\ddot{x} + \lambda = 0$$

$$-\tfrac{1}{2} M R^2 \ddot{\theta} - \lambda R = 0$$

যেহেতু $\dot{x} = R\dot{\theta}$ তাই উপরের দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে আমরা পাই $\lambda = -\tfrac{1}{2}M\ddot{x}$ এবং প্রথম সমীকরণ থেকে $\ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin \alpha$। সমাকলন করে,

$$\int_0^v \ddot{x}\dot{x}\, dt = \tfrac{2}{3} g \sin \alpha \int_0^l dx$$

সুতরাং

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{2lg}{3} \sin \alpha$$

$$v = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{gl \sin \alpha}$$

প্রশ্নমালা

১। যদি n স্বাধীনতার মাত্রাবিশিষ্ট বস্তুনিচয়ের লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক L হয়, তবে দেখাও যে,

$$L' = L + \frac{d\Phi}{dt}$$

লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ সার্থক করে যেখানে $\Phi = \Phi(q_1, \ldots, q_n, t)$ একটি যে-কোন অবাধ অপেক্ষক যা $q_1, \cdots, q_n$ এবং t এর উপর নির্ভরশীল এবং অন্তরকলন-যোগ্য।

২। একটি m ভরের বস্তুকণা একটি ভরহীন, প্রসারণহীন দণ্ডের সাহায্যে একটি খাড়া l ব্যাসার্ধের বৃত্তের মধ্যে ঘোরে। তার পর্যায়বৃত্তের সময় নির্ধারণ কর।

উত্তর : $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{\alpha^2}{16} + \frac{11\alpha^4}{3072} + \ldots\right]$

α সর্বোচ্চ কৌণিক সরণ।

৩। একটি l দৈর্ঘ্যের শৃঙ্খল (O, a) এবং (L, b) এই দুই বিন্দুর মধ্যে ঝুলান আছে। শৃঙ্খলের স্থিতাবস্থার আকৃতি নির্ধারণ কর।

উত্তর: স্থিতাবস্থার আকৃতি ক্যাটিনারি,

$$y + \lambda = k \cosh\left(\frac{x+h}{k}\right)$$

h, λ এবং k ধ্রুব রাশি যা a, b এবং l রাশির সঙ্গে সংশ্লিষ্ট।

৪। দেখাও যে একটি চোঙের উপর যে কোন দুটি বিন্দুর মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব হল একটি হেলিক্স।

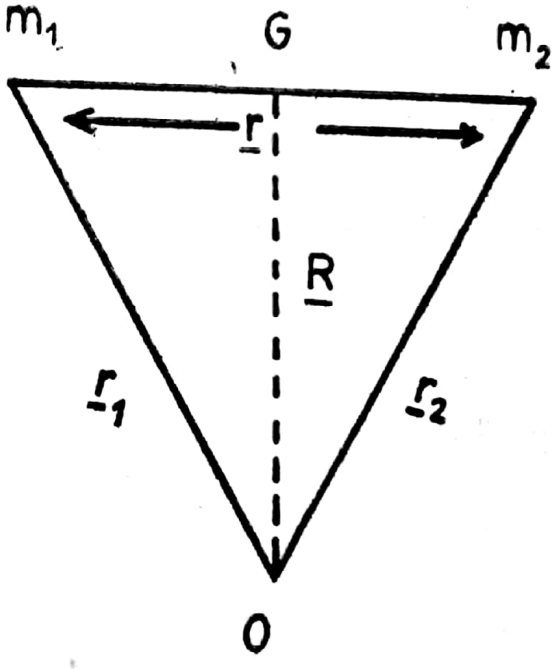
চতুর্থ অধ্যায়

কেন্দ্রীয় বলের অধীনে যুগল বস্তুর গতি

এই অধ্যায়ে পারস্পরিক কেন্দ্রীয় বলের অধীনে দুটি বস্তুর গতিপথ আলোচনা করা হবে। মহাকাশে গ্রহগতি, পরমাণু-কেন্দ্রীনের চতুষ্পার্শ্বে ইলেকট্রনের পরিভ্রমণ, কেন্দ্রীন থেকে আলফা কণার বিক্ষেপণ ইত্যাদি সমস্যায় এই তত্ত্বের প্রয়োজন হয়।

৪.১ দুটি বস্তুর বদলে সমতুল এক বস্তুর গতি

দুটি বস্তুর গতি বর্ণনার জন্যে ছয়টি রাশির প্রয়োজন হয়। যেমন



চিত্র : ৪.১

মূলবিন্দু O থেকে বস্তুদ্বয়ের অবস্থান সদিক রাশি $\underline{r}_1$ এবং $\underline{r}_2$ (চিত্র ৪.১); প্রতিটির তিনটি উপাংশ করে মোট ছয়টি রাশি। বিকল্প হিসেবে আমরা ভরকেন্দ্র G-এর অবস্থান সদিক রাশি $\underline{R}$ এবং দুটি বস্তুর আপেক্ষিক দূরত্ব $\underline{r}$ নিতে পারি (এদেরও প্রত্যেকটির রয়েছে ৩টি উপাংশ),

$$(m_1 + m_2)\underline{R} = m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2$$

$$\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2 \qquad (৪.১)$$

সুতরাং বস্তুদ্বয়ের জন্যে লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হল

$$L = \tfrac{1}{2} m_1 \dot{\underline{r}}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \dot{\underline{r}}_2^2 - U(r) \qquad (৪.২)$$

এখানে বিভবশক্তি $U(r)$ বস্তুদ্বয়ের আপেক্ষিক দূরত্বের মানের উপর নির্ভরশীল নেয়া হয়েছে।

একটি বস্তুর সাপেক্ষে অন্য বস্তুটির গতিপথ নির্ধারণ করার ব্যাপারে বস্তুদ্বয়ের সামগ্রিক রৈখিক সরণ জানা প্রয়োজন হয় না।

সুতরাং মূলকেন্দ্র বস্তুদ্বয়ের ভরকেন্দ্রে নেয়া যায়। সেক্ষেত্রে $R = 0$ এবং

$$m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2 = 0$$

$$\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$$

এই দুটি সমীকরণ সমাধান করে পাওয়া যায়,

$$\underline{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \underline{r} \qquad \underline{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \underline{r} \qquad (৪.৩)$$

(৪.২) সমীকরণ ব্যবহার করে আমরা পাই,

$$L = \tfrac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\underline{r}}^2 - U(r)$$

$$= \tfrac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - U(r) \qquad (৪.৪)$$

যেখানে μ হল সমরূপ ভর,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (৪.৫)$$

সুতরাং বস্তুযুগলের লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক (সমীকরণ ৪.৪) এখন একটি সমতুল বস্তুকণার সমস্যায় পর্যবসিত হয়েছে।

৪.২ কেন্দ্রীয় বলের অধীনে গতিপথ

যদি কোন বস্তুকণার উপর আরোপিত বল কোন স্থির বিন্দু (ধরা যাক মূল বিন্দু 0) থেকে দূরত্বের উপর নির্ভরশীল হয় এবং দূরত্বের দিকে হয়,

তাহলে

$$\underline{F}\,(\underline{r}) = \hat{\underline{r}}\, f(r) \qquad (8.6)$$

যেখানে $\hat{r}$ হল $\underline{r}$-এর দিকে একক সদিক রাশি।

সেক্ষেত্রে ঐ বলকে কেন্দ্রীয়-বল বলা হয়। বলের দিক স্থির বিন্দু অর্থাৎ মূল বিন্দুর দিকে অথবা তার বিপরীত দিকে হতে পারে। এই বিশেষ 'স্থির বিন্দুকে' বলকেন্দ্র বলা হয়। বলের দিক বলকেন্দ্রের দিকাভিমুখী হলে তাকে আকর্ষণী বল এবং বল কেন্দ্রের প্রত্যাভিমুখী হলে তাকে বিকর্ষণী বল বলে। কেন্দ্রীয় বলের বৈশিষ্ট্য হল যে বলকেন্দ্রের সাপেক্ষে বস্তুকণার কৌণিক ভরবেগ একটি ধ্রুবরাশি যা $f(r)$ অপেক্ষকের বিশেষ প্রকাশের উপর নির্ভর করে না। ধরা যাক μ ভরবিশিষ্ট একটি কণিকার উপর একটি কেন্দ্রীয় বল $\underline{F}(\underline{r})$ সক্রিয়। এই বৈশিষ্ট্য প্রমাণ করার জন্যে অবস্থান সদিক রাশি $\underline{r}$ এবং বল $\underline{F}$ এর সদিক গুণন করা যায়,

$$\underline{r} \times \underline{F} = \underline{r} \times \hat{\underline{r}}\, f(r) = 0$$

যেহেতু $\quad f(r) = \mu \dot{v}$,

$$\mu\, \underline{r} \times \dot{\underline{v}} = 0$$

অর্থাৎ

$$\frac{d}{dt}(\mu\, \underline{r} \times \underline{v}) = 0 \qquad \text{যেহেতু } \underline{v} \times \underline{v} = 0$$

সুতরাং

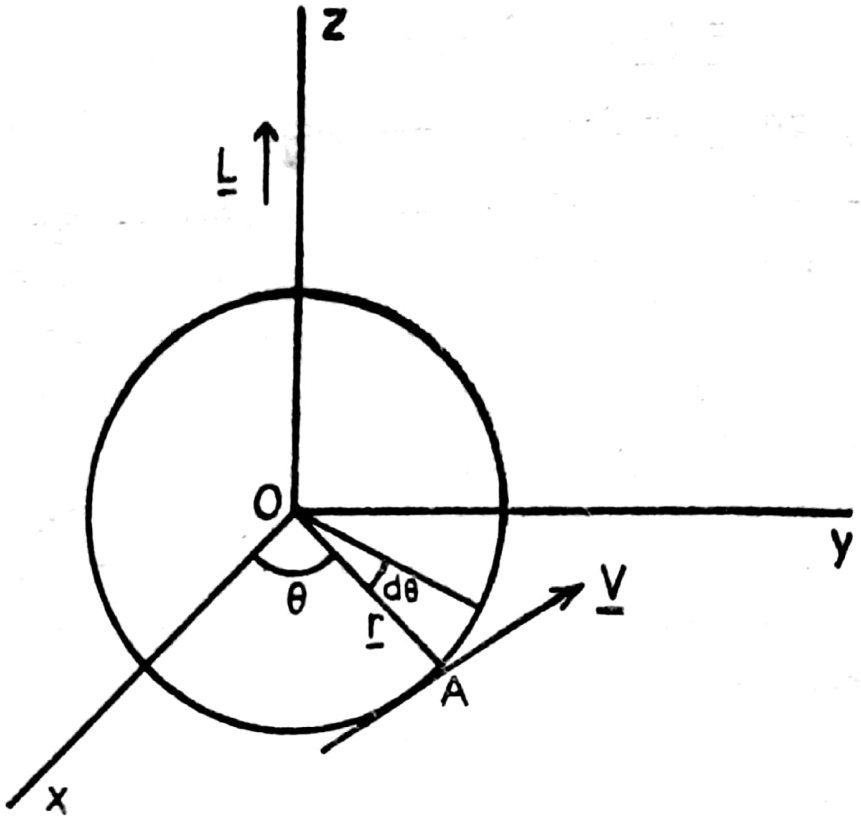
$$\underline{L} = \underline{r} \times \mu\, \underline{v}$$
$$= \underline{r} \times \underline{p} = \text{ধ্রুবরাশি} \qquad (8.7)$$

এই সদিক রাশি $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$ কে কৌণিক ভরবেগ বলে। সুতরাং কেন্দ্রীয় বলের অধীনে গতির জন্য কৌণিক ভরবেগ একটি ধ্রুবরাশি।

কৌণিক ভরবেগের সঙ্গে অবস্থান সদিক রাশির নিদিক গুণন করে পাওয়া যায়,

$$\underline{r} \cdot \underline{L} = \underline{r} \cdot (\underline{r} \times \underline{p}) = \underline{p} \cdot (\underline{r} \times \underline{r}) = 0 \qquad (8.8)$$

সুতরাং $\underline{L}$ সদিক রাশি $\underline{r}$ এবং $\underline{p}$ উভয়ের উপর লম্ব। অতএব $\underline{r}$ এবং $\underline{p}$ যে তলের উপর অবস্থিত তার উপর ডান-হাতি লম্বের দিক হল কৌণিক



চিত্র : ৪.২

ভরবেগের দিক (চিত্র ৪.২)। লক্ষণীয় যে কেন্দ্রীয় বলের অধীনে বস্তুকণার গতি সবসময় একটি সমতলে আবদ্ধ।

যেহেতু গতিপথ একটি তলে আবদ্ধ তাই দ্বিমাত্রিক মেরু স্থানাঙ্ক (r, θ) ব্যবহার করা যায়। এই স্থানাঙ্কে $(x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$ গতিশক্তি হল

$$T = \tfrac{1}{2}\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \tfrac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \qquad (৪.৯)$$

সুতরাং বস্তুকণাটির জন্য লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (৪.১০)$$

যেখানে Q_i হল সাধারণীকৃত বল,

$$Q_i = \underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i}$$

এবং $q_1 = r,\ q_2 = \theta$ হল সাধারণীকৃত স্থানাঙ্ক। অতএব

$$Q_r = \underline{F} \cdot \hat{\underline{r}} = F_r$$

$$Q_\theta = \underline{F} \cdot r\,\hat{\underline{\theta}} = r F_\theta$$

যেহেতু $\partial \hat{\underline{r}}/\partial\theta = r\,\hat{\underline{\theta}}$ কেননা ৪.২ চিত্র থেকে $\vec{OB} - \vec{OA} = \underline{r} + d\underline{r} - \underline{r} = \vec{AB} = r\,d\theta\,\hat{\underline{\theta}}$। সুতরাং (৪.১০) সমীকরণ থেকে

$$\frac{d}{dt}\left(\mu \dot{r}\right) - \mu r \dot{\theta}^2 = F_r = f(r) \qquad (৪.১১ক)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mu r^2 \dot{\theta}\right) = 0 \qquad (৪.১১খ)$$

সুতরাং দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে

$$\mu r^2 \dot{\theta} = \text{ধ্রুবরাশি} = l \qquad (৪.১২)$$

এই সমীকরণ (৪.৭) সমীকরণ থেকেও পাওয়া যায়। ৪.২ চিত্র থেকে OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $A = \frac{1}{2} r.\ r\,d\theta$। যেহেতু A ক্ষেত্রফল dt সময়ে অতিক্রান্ত হয় অতএব জাগতিক (এরিয়াল) গতিবেগ হল,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{2\mu} \qquad (৪.১৩)$$

এটাও একটি ধ্রুব সংখ্যা। সুতরাং কেন্দ্রীয় বলের অধীনে গতির দ্বিতীয় বৈশিষ্ট্য হল এই যে অবস্থান ব্যাসার্ধ দিকরাশি $\underline{r}$ সমান সময়ে সমান ক্ষেত্রফল পরিভ্রমণ করে। এটাই গ্রহগতিবিদ্যায় কেপলারের দ্বিতীয় নিয়ম নামে পরিচিত।

(৪.১১ক) সমীকরণে (৪.১২) সমীকরণ ব্যবহার করে লেখা যায়,

$$\mu \ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} = f(r) = -\frac{dU}{dr} \qquad (৪.১৪)$$

এই অন্তরকলন সমীকরণ সমাধান করে গতিপথ $r = r(t)$ নির্ধারণ করা হয়। সমীকরণটিকে $\dot{r}$ দিয়ে গুণ করে,

$$\mu \ddot{r}\dot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3}\dot{r} = -\frac{dU}{dt}$$

সমাকলন করে,

$$\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + U + \frac{l^2/2\mu}{r^2} = \text{ধ্রুবরাশি}$$

এই ধ্রুবরাশি আসলে সামগ্রিক শক্তি E কেননা

$$E = T + U$$

$$= \tfrac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + U(r)$$

$$= \tfrac{1}{2}\mu\,\dot{r}^2 + \frac{l^2/2\mu}{r^2} + U(r) \qquad (8.১৫)$$

সুতরাং কেন্দ্রীন বলের অধীনে গতিতত্ত্বে দুটি ধ্রুবরাশি পাওয়া যায়—সামগ্রিক শক্তি E এবং ধ্রুব কৌণিক ভরবেগ L। এ দুটিকে (সমীকরণ ৪.১২ ও ৪.১৫) গতির প্রথম সমাকলন সংখ্যা বলে।

৪.৩ গ্রহের কক্ষপথ

কেন্দ্রীয় বলের অধীনে গ্রহের গতিসমীকরণ হল

$$\mu\,\ddot{r} - \frac{l^2/\mu}{r^3} = f(r) \qquad (8.১৬)$$

এখন $u = 1/r$ লিখে আমরা পাই,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta}\frac{l}{\mu r^2} = \frac{l}{\mu}\,u^2\,\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$= -\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\theta}$$

এবং

$$\ddot{r} = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\theta}\right)\dot{\theta} = -\frac{l^2}{\mu^2}\,u^2\,\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

সুতরাং গতিসমীকরণ হল,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{l^2}\frac{f(u)}{u^2} \qquad (8.১৭)$$

কেন্দ্রীয় বলের আইন জানা থাকলে এই সমীকরণ সমাধান করা যায়। নিউটনীয় মহাকর্ষ তত্ত্বে, M এবং m ভরবিশিষ্ট দুটি বস্তুর মধ্যে আকর্ষণী বল হল,

$$f(r) = -G_N\frac{Mm}{r^2} = -\frac{k}{r^2} \qquad (8.১৮)$$

যেখানে G_N নিউটনীয় বা মহাকর্ষ ধ্রুবক,

$$G_N = (৬.৬৭৩ \pm 0.০০৩) \times ১০^{-৮} \text{ ডাইন} \times (\text{সেমি})^২/(\text{গ্রাম})^২$$

সুতরাং

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu k}{l^2} \qquad (৪.১৯)$$

এই সমীকরণের সমাধান হল

$$u = C\cos(\theta + \delta) + \frac{\mu k}{l^2} \qquad (৪.২০)$$

যেখানে C এবং δ দুটি ধ্রুব সংখ্যা। (৪.২০) সমীকরণ থেকে u সরাসরি (৪.১৯) সমীকরণে বসিয়ে এটা প্রমাণ করা যায়। এখন x-অক্ষরেখাকে এমনভাবে নেয়া যায় যে যখন $\theta = 0$ তখন r এর মান সর্বনিম্ন। সুতরাং সেক্ষেত্রে $\delta = 0$ এবং

$$\frac{1}{r} = C\cos\theta + \frac{\mu k}{l^2}$$

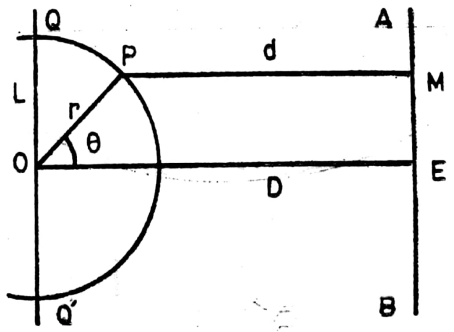
অথবা

$$r = \frac{L}{1 + e\cos\theta} \qquad (৪.২১)$$

যেখানে

$$e = Cl^2/\mu k \qquad L = l^2/\mu k$$

(৪.২১) সমীকরণ শঙ্কু-জ্যামিতির (কোনিক সেকশনের) পরিচিত সমীকরণ। এখানে আমরা একটা স্থির বিন্দু O এবং তার থেকে D দূরত্বে AB সরলরেখা



চিত্র : ৪.৩

নেই। ধরা যাক P বিন্দু এমনভাবে সঞ্চরণশীল যে যে-কোন বিন্দুতে PO এবং PM সরলরেখাদ্বয়ের অনুপাত ধ্রুব। সুতরাং

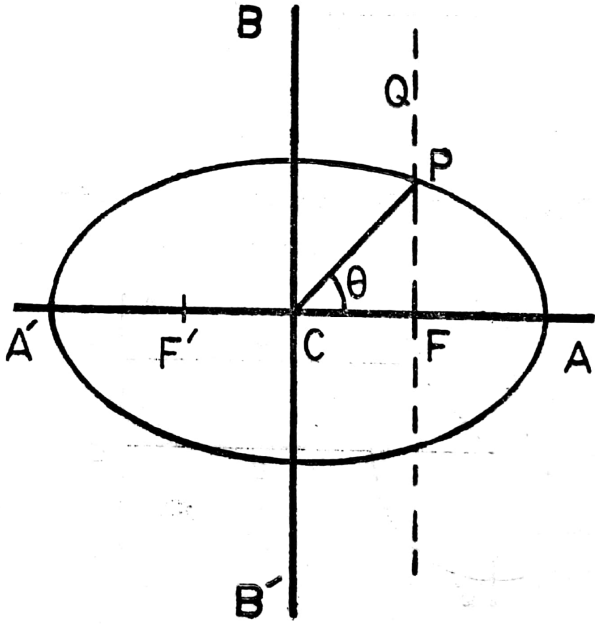
$$\frac{r}{d} = e \qquad \frac{L}{D} = e$$

যেখানে e একটি ধ্রুব সংখ্যা। যেহেতু $D = d + r\cos\theta$

$$L = eD = r\,(1 + e\cos\theta)$$

এটাই (৪.২১) সমীকরণ। এখন যদি $e = 0$ হয়, তাহলে r = ধ্রুব সংখ্যা অর্থাৎ তখন বৃত্তের সমীকরণ পাওয়া যায়; যদি e এর মান শূন্য এবং ১ এর মধ্যে থাকে $(0 < e < 1)$ তাহলে আমরা উপবৃত্ত (ellipse) পাই; যদি e-এর মান ১-এর সমান হয় তবে আমরা অধিবৃত্ত (parabola) পাই এবং e-এর মান ১ এর বেশি হলে আমরা পরাবৃত্ত (hyperbola) পাই। ধ্রুব সংখ্যা e-কে 'উৎকেন্দ্রিকতা' (eccentricity) বলে।

উপবৃত্তের কেন্দ্র C বিন্দু (চিত্র ৪.৪) এবং $CA = a$ এবং $CB = b$ কে বলে যথাক্রমে অর্ধ অধি-অক্ষ এবং অর্ধ উপ-অক্ষ। F, F′ উপবৃত্তের দুটি ফোকাস



চিত্র : ৪.৪

এবং $FQ = L$ অর্ধ-ল্যাটাসরেক্টাম। যখন $\theta = 0$, $r = FA$ এবং যখন $\theta = \pi$, $r = FA'$, কিন্তু $FA + FA' = 2a$। সুতরাং $L = a\ (1 - e^2)$। আবার $CF = CA - FA = a - a\ (1 - e) = ae$। কিন্তু $CB^2 + CF^2 = BF^2$ এবং $BF = a$। সুতরাং $b = a\sqrt{1 - e^2}$। গ্রহগতিবিজ্ঞানে C সূর্যের অবস্থান এবং P যে কোন সময়ে যে কোন গ্রহের অবস্থান ধরা যায়। উপবৃত্তের FA দূরত্বকে অনসূর (perihelion) এবং FA' দূরত্বকে অপসূর (aphelion) বলে। স্পষ্টতই

$$\text{অনসূর দূরত্ব} = \frac{L}{1+e} \qquad \text{অপসূর দূরত্ব} = \frac{L}{1-e}$$

সূর্যের চারপাশে পৃথিবীর উপবৃত্তাকার কক্ষপথের উৎকেন্দ্রিকতা হল $e = 0.0167$ আর তার অনসূর এবং অপসূর দূরত্ব যথাক্রমে ৯.১ এবং ৯.৫ কোটি মাইল। ধূমকেতুর উৎকেন্দ্রিকতা অনেক বেশি। হ্যালির ধূমকেতুর উৎকেন্দ্রিকতা 0.967; তাই তার অপসূর দূরত্ব নেপচুন গ্রহেরও বাইরে।

যেহেতু $$L = a\ (1 - e^2) = l^2/\mu k$$

সুতরাং $$e = \sqrt{1 - l^2/\mu k a}$$

কিন্তু (৪.১৫) সমীকরণ থেকে বলা যায় যে যখন $\dot{r} = 0$ (অর্থাৎ A এবং A' বিন্দুর জন্য),

$$E - \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r} = 0 \qquad (8.22)$$

যেখানে $U = -k/r$

এই দ্বিঘাত সমীকরণের মূল দুটির সমষ্টি হল $-k/E$ অর্থাৎ

$$2a = r_{max} + r_{min} = -\frac{k}{E} \qquad (8.23)$$

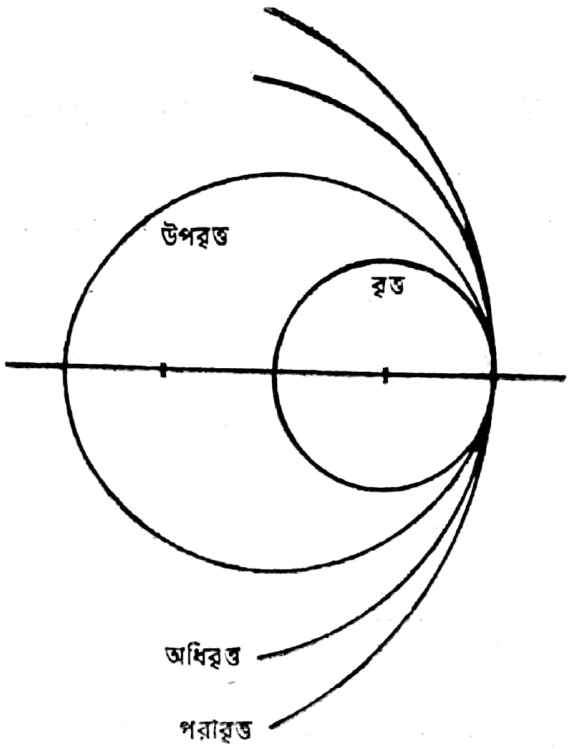
সুতরাং $e = \sqrt{1 + 2El^2/\mu k^2}$। অতএব কক্ষপথের শ্রেণীবিভাগ এভাবে করা হয়,

$e > 1$	$E > 0$	পরাবৃত্ত
$e = 1$	$E = 0$	অধিবৃত্ত

$0 < e < 1$ $V_{min} < E < 0$ উপবৃত্ত $V_{min} = -\mu k^2/2l^2$

$e = 0$ $E = V_{min}$ বৃত্ত

$e < 0$ $E < V_{min}$ সম্ভব নয়



চিত্র : ৪.৫

সামগ্রিক শক্তির সমীকরণ (৪.১৫ সমীকরণ) এভাবে লেখা যায়

$$E = \tfrac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

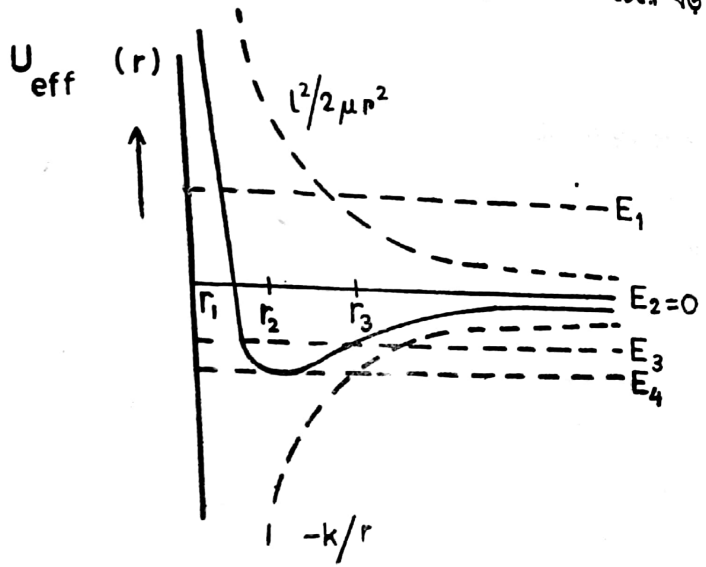
যেখানে কার্যকর বিভবশক্তির সংজ্ঞা হল,

$$U_{eff} = -\frac{k}{r} + \frac{l^2/2\mu}{r^2} \qquad (8.28)$$

এই অপেক্ষকের প্রথম অংশ মহাকর্ষ বিভব $-k/r$ এবং দ্বিতীয় অংশ কেন্দ্রাতিগ বল থেকে উদ্ভূত শক্তি।

অপেক্ষকটির রেখাচিত্র (৪.৬) চিত্রে দেখানো হল।

বস্তুকণার সামগ্রিক-শক্তি $E_1 > 0$ হলে গতিপথ কোনভাবেই r_1 দূরত্বের কম হতে পারে না, কেননা সেক্ষেত্রে বিভবশক্তি U_{eff} সামগ্রিক শক্তির চেয়ে বড় হয়ে



চিত্র : ৪.৬

যাবে যা চিরায়ত বলবিদ্যায় অসম্ভব। সুতরাং এ ক্ষেত্রে বস্তুকণা অসীম দূরত্ব থেকে এসে বিভবের সম্মুখীন হবে এবং প্রতিফলিত হয়ে আবার অসীম দূরত্বে ফিরে যাবে। এক্ষেত্রে $(E > 0)$ বস্তুর গতিপথ পরাবৃত্ত।

যদি সামগ্রিক শক্তি $E_2 = 0$ হয় তাহলেও r এর কোন সর্বোচ্চ মান থাকে না এবং সেক্ষেত্রেও গতিপথ অবাধ। এবার গতিপথ হল অধিবৃত্ত।

কিন্তু সামগ্রিক শক্তি $E_3 < 0$ হলে r এর উচ্চমান r_3 এবং নিম্নমান r_2 থাকবে। এক্ষেত্রে গতি আবদ্ধ কেননা দুই বিন্দু r_2 এবং r_3 থেকে বস্তুকণা ফিরে আসে। এ দুটি হল অপদূরক (apsidal) বিন্দু। এই দুই বিন্দুতে বস্তুকণার গতিবেগ শূন্য।

সবশেষে সামগ্রিক শক্তি যদি E_4 হয় যেখানে কার্যকর বিভবের মান সর্বনিম্ন $(E_4 = U_{min})$ তাহলে r এর একটাই সম্ভাব্য মান থাকে এবং সেক্ষেত্রে গতিপথ হয়ে যায় একটি বৃত্ত। সুতরাং বৃত্তাকার গতিপথের জন্যে,

$$\frac{\partial U_{eff}}{\partial r} = 0$$

অর্থাৎ

$$U_{min} = -\frac{\mu k^2}{2l} \qquad (8.25)$$

৪·৪ গ্রহগতির কেপলারের আইন

গ্রহগতির কেপলারের বিখ্যাত তিনটি আইন হল,

(১) প্রতিটি গ্রহ একটি উপবৃত্তে পরিভ্রমণ করে যার একটি ফোকাসে থাকে সূর্য,

(২) অবস্থান অথবা ব্যাসার্ধ সদিক রাশি $\underline{r}$ সমান সময়ে সমান ক্ষেত্রফল অতিক্রম করে এবং

(৩) গ্রহ ঘূর্ণনের পর্যায়কালের বর্গ উপবৃত্তাকার কক্ষপথের অর্ধ-অধিঅক্ষরেখার ত্রিঘাতের সমানুপাতিক।

কেপলারের দ্বিতীয় আইন কেন্দ্রীয় বলের অধীনে গতির সাধারণ বৈশিষ্ট্য যা আগেই বলা হয়েছে। সাধারণভাবে কেন্দ্রীয় বলের অধীনে গ্রহের গতি একটি শঙ্কু (কোনিক) যার সমীকরণ হল,

$$r = \frac{L}{1 + e\cos\theta} = \frac{1}{u} \qquad (8.26)$$

এবং কেপলারের প্রথম আইন অনুসারে কক্ষপথগুলি উপবৃত্ত, সুতরাং $0 < e < 1$।

কক্ষপথের অন্তরকলন সমীকরণ হল,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{l^2}\frac{f(u)}{u^2}$$

যেখানে $u = 1/r$ এবং l একটি ধ্রুব সংখ্যা (সমীকরণ ৪.১২)। এখন (৪.২৬) সমীকরণকে দুবার অন্তরকলন করে আমরা পাই,

$$-\frac{e}{L}\cos\theta + \frac{1}{L} + \frac{e}{L}\cos\theta = -\frac{\mu}{l^2}\frac{f(u)}{u^2}$$

সুতরাং

$$f(u) = -\frac{l^2u^2}{u}$$

এবং L ধ্রুবরাশিকে $l^2/\mu k$ নিয়ে, আমরা পাই

$$f(r) = -\frac{k}{r^2}$$

অর্থাৎ কেপলারের প্রথম আইন থেকে বলের ব্যস্ত বর্গের আইন নির্ধারণ করা যায়। নিউটন এটাই করেছিলেন এবং এভাবেই তিনি তাঁর সুবিখ্যাত মহাকর্ষ আইন পেয়েছিলেন,

$$\underline{F}(\underline{r}) = -G_N \frac{Mm}{r^2} \hat{\underline{r}}$$

উপবৃত্তাকার কক্ষপথের পর্যায়কাল নির্ণয় করতে হলে আমরা জাগতিক গতিবেগ (সমীকরণ ৪.১৩ দ্রষ্টব্য)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu}$$

ব্যবহার করতে পারি যেখানে অবস্থান সদিক রাশি dt সময়ে dA ক্ষেত্রফল অতিক্রম করে। সুতরাং প্রতিটি ঘূর্ণনের ক্ষেত্রফল A পাওয়া যাবে এভাবে,

$$\int_0^T dt = \frac{2\mu}{l} \int_0^A dA$$

সুতরাং পর্যায়কাল হল $T = 2\mu A/l$ এবং যেহেতু উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল হল $A = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$ এবং $L = a(1-e^2) = l^2/\mu k$, তাই

$$T = \frac{2\mu\pi}{l} a^2\sqrt{1-e^2} = \frac{2\mu\pi a^2}{l}\sqrt{\frac{l^2}{\mu k a}} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}.a^{3/2}$$

সুতরাং

$$T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{k} a^3 = \frac{4\pi^2 a^3}{(M+m)G_N} \qquad (8.27)$$

এটাই কেপলারের তৃতীয় আইন।

৪.৫ গতিসমীকরণের সমাকলন

কেন্দ্রীয় বলের অধীনে বস্তুর গতিসমীকরণ হল, (সমীকরণ ৪.১৪)

$$\mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} = -\frac{\partial U}{\partial r} \qquad (৪.২৮)$$

$$\mu r^2 \dot{\theta} = l \qquad (৪.২৯)$$

৪.২৯ সমীকরণকে সমাকলন করে,

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \frac{l}{\mu}\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{r^2(t)}$$

যেখানে t_0 সময়ে θ-কোণের মান θ_0। সুতরাং যে কোন সময় t'তে $\theta(t)$ হবে,

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{l}{\mu}\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{r^2(t)} \qquad (৪.৩০)$$

৪.২৮ সমীকরণটি সমাকলন করে পাওয়া যায়,

$$\tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + U = E$$

সুতরাং

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2}\right)}$$

অথবা

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2}\right)}} + \text{ধ্রুব সংখ্যা } (t_0) \qquad (৪.৩১)$$

বিভব অপেক্ষক $U = U(r)$ জানা থাকলে এই সমাকলন থেকে সময়ের অপেক্ষক হিসেবে r পাওয়া যায় অর্থাৎ (৪.৩১) সমাকলন থেকে কক্ষপথ নির্ধারণ করা যায়।

ব্যস্ত বর্গের বিভবের জন্য,

$$U(r) = -\frac{k}{r}$$

এবং আবদ্ধ কক্ষপথের জন্য E ঋণাত্মক। সুতরাং $E = -|E|$ লিখে আমরা পাই,

$$t = \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{k}{|E|}r - \frac{l^2}{2\mu|E|}}} + t_0$$

যেহেতু $a = k/|E|$ এবং $a^2e^2 = a^2 - l^2/2\mu|E|$ যেখানে a উপবৃত্তের অর্ধ-অধিঅক্ষ এবং e তার উৎকেন্দ্রিকতা, তাই

$$t = \sqrt{\frac{\mu a}{k}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}} + t_0$$

এখানে $r - a = -ae\cos\psi$ লিখে আমরা পাই,

$$t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}} \int (1 - e\cos\psi)\,d\psi + t_0$$

$$= \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}} \left(\psi - e\sin\psi\right) + t_0$$

এখন সময় যদি এমনভাবে মাপা হয় যে $t = 0$ সময়ে গ্রহটি অনসূরে থাকে (যেখানে $\psi = 0$) তাহলে স্পষ্টতই $t_0 = 0$। সুতরাং কক্ষপথের সমীকরণ হল,

$$r = a(1 - e\cos\psi), \quad t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}} \left(\psi - e\sin\psi\right) \quad (8.32)$$

এ দুটি হল উপবৃত্তাকার কক্ষপথের পরিবর্তী রাশিভিত্তিক (parametric) সমীকরণ।

(8.30) সমীকরণকে সমাকলন করার জন্য লক্ষ্য করা প্রয়োজন যে

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dt}{dr} \cdot dr = \frac{\dot\theta}{\dot r}\,dr = \frac{l}{\mu r^2}\,\frac{dr}{\dot r}$$

সুতরাং $u = 1/r$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$\theta = \theta_0 + \frac{l}{\mu}\int \frac{dr}{r^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2}\right)}}$$

$$= \theta_0 - l \int \frac{du}{\sqrt{2\mu\,(E - U) - l^2u^2}}$$

ব্যস্ত বর্গের বলের জন্য,

$$U = -ku$$

এবং

$$\theta = \theta_0 - l \int \frac{du}{\sqrt{2\mu E + 2\mu k\,u - l^2\,u^2}}$$

যেহেতু

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \cos^{-1}\left(-\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}\right)$$

আমরা সমাকলন করে পাই,

$$\theta = \cos^{-1}\left[-\frac{2\mu k - 2l^2 u}{\sqrt{4\mu^2 k^2 + 8\mu El^2}}\right] + \theta_0$$

অথবা

$$\cos(\theta - \theta_0) = \frac{Lu - 1}{e} \qquad (8.৩৩)$$

যেখানে

$$L = l^2/\mu k \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}$$

এভাবে আবার আমরা উপবৃত্তের সমীকরণ পাই $(E < 0)$,

$$r = \frac{L}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)} \qquad (8.৩৪)$$

৪.৬ কক্ষপথ নির্ধারণের সদিক পদ্ধতি

কেন্দ্রীয় বলের অধীনে গতিসমীকরণ হল

$$\mu \ddot{\underline{r}} = \underline{F} = -\hat{\underline{r}} \frac{k}{r^2}$$

এবং আমরা জানি যে এ ধরনের বলের ক্ষেত্রে কৌণিক ভরবেগ $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$ একটি ধ্রুব সদিক রাশি। স্পষ্টতই নতুন একটি সদিক রাশি

$$\underline{Q} = \underline{L} \times \dot{\underline{r}}$$

কক্ষপথের তলে অবস্থিত কেননা $\underline{L}$ কক্ষপক্ষের উপর লম্ব। সুতরাং

$$\dot{Q} = \underline{L} \times \ddot{\underline{r}} = \mu (\underline{r} \times \dot{\underline{r}}) \times \left(-\underline{r} \frac{k}{\mu r^3} \right)$$

$$= \frac{k}{r^3} (\underline{r}\, \underline{r} \cdot \dot{\underline{r}} - \dot{\underline{r}}\, r^2)$$

$$= \frac{k}{r^3} (\underline{r}\, r\, \dot{r} - \dot{\underline{r}}\, r^2)$$

$$= -k \frac{d}{dt} \left(\frac{\underline{r}}{r} \right) = -k \frac{d}{dt} (\hat{\underline{r}})$$

সমাকলন করে,

$$\underline{Q} + k \hat{\underline{r}} = \text{ধ্রুবরাশি} = -\underline{B} \qquad (8.৩৫)$$

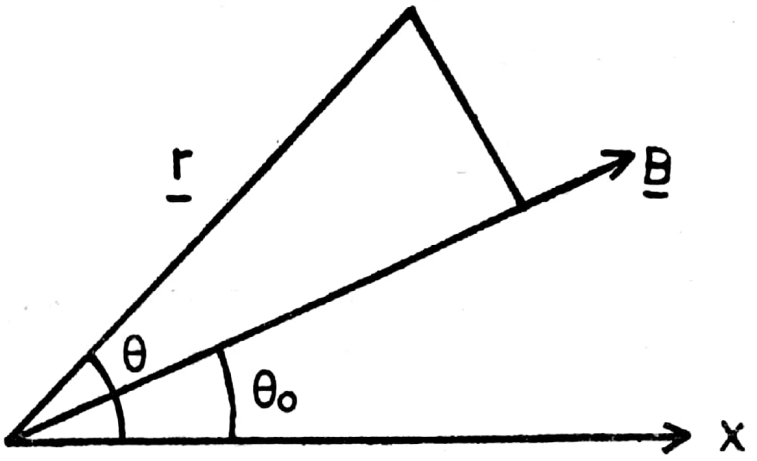
এখন $\underline{Q}$ এবং $\hat{\underline{r}}$ সদিক রাশিদ্বয়ের নিদিক গুণন করে,

$$\underline{Q} \cdot \hat{\underline{r}} = \frac{\underline{r}}{r} \cdot \left(\underline{L} \times \dot{\underline{r}} \right) = \frac{1}{r} \underline{L} \cdot \left(\dot{\underline{r}} \times \underline{r} \right)$$

$$= -\frac{1}{\mu r} \underline{L} \cdot \underline{L} = -\frac{l^2}{\mu r}$$

সুতরাং (৪.৩৫) সমীকরণ থেকে,

$$-\underline{B} \cdot \hat{\underline{r}} = -\frac{l^2}{\mu r} + k$$



চিত্র : ৪.৭

এখন $\underline{B}$ সদিক রাশিকে x-অক্ষরেখার সঙ্গে θ_0 কোণে নেয়া যায় এবং $\underline{r}$ অবস্থান সদিক রাশির ঐ অক্ষরেখার সঙ্গে কোণ হল θ। সুতরাং $\underline{B} \cdot \hat{\underline{r}} = B \cos(\theta - \theta_0)$ এবং তাই

$$\cos(\theta - \theta_0) = \frac{1}{e} \cdot \frac{L}{r} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e}\left(\frac{L}{r} - 1\right)$$

যেখানে $L = l^2/\mu k$ এবং $e = B/k$ লেখা হয়েছে। সুতরাং আবার আমরা শঙ্কুর সমীকরণ $r = L/[1 + e\cos(\theta - \theta_0)]$ ফিরে পাই। (৪.৩৫) সমীকরণ থেকে

$$Q^2 + k^2 + 2k\left(-\frac{l^2}{\mu r}\right) = B^2$$

কিন্তু $Q^2 = (\underline{L} \times \underline{\dot{r}}) \cdot (\underline{L} \times \underline{\dot{r}}) = L^2 \underline{\dot{r}}^2 - (\underline{L} \cdot \underline{\dot{r}})^2 = l^2 \underline{\dot{r}}^2$

কেননা $\underline{L}$ এবং $\underline{\dot{r}}$ পরস্পরের উপর লম্ব। সুতরাং

$$l^2 \dot{r}^2 + k^2 - \frac{2kl^2}{\mu r} = B^2$$

আবার সামগ্রিক শক্তি হল,

$$E = \tfrac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + U(r) = \tfrac{1}{2}\mu \dot{r}^2 - \frac{k}{r}$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{\mu}{l^2}\left(B^2 - k^2 + \frac{2kl^2}{\mu r}\right) - \frac{k}{r}$$

$$= \frac{\mu}{2l^2}\,(B^2 - k^2) = \frac{\mu k^2}{2l^2}\,(e^2 - 1)$$

সুতরাং পূর্বের মতই

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}$$

নতুন সদিক রাশিটি $\underline{Q} + k\,\hat{\underline{r}}$ সময়ের সাপেক্ষে ধ্রুব প্রমাণ করা হয়েছে। আসলে

$$\underline{A} = -\mu\,(\underline{Q} + k\,\hat{\underline{r}}) = \underline{p} \times \underline{L} - \frac{\mu k}{r}\,\underline{r} \qquad (8.36)$$

সদিক রাশিকে লাপ্লাস-রুঙ্গে-লেন্‌ৎস্‌ সদিক রাশি বলে। এটি $\underline{L}$ সদিক রাশির উপর লম্ব,

$$\underline{A} \cdot \underline{L} = 0$$

কেননা $\underline{L}$ সদিক রাশি $\underline{p} \times \underline{L}$ এবং $\underline{r}$ উভয় সদিক রাশির উপর লম্ব।

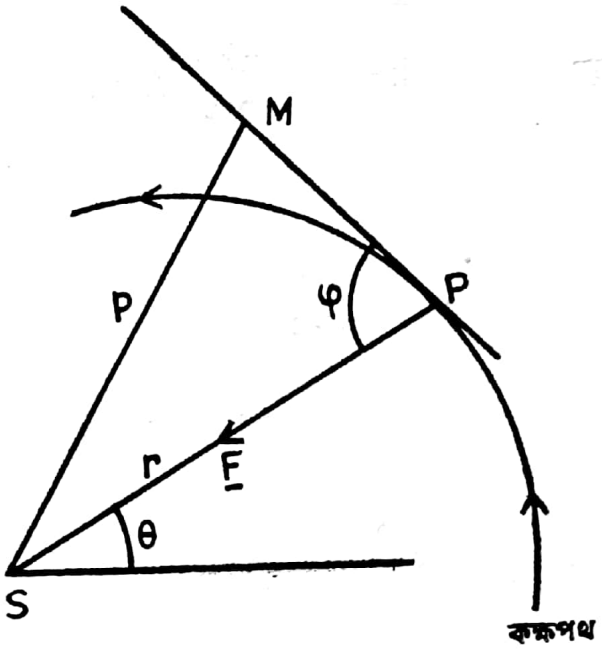
সুতরাং গ্রহগতির সমস্যায় আমরা দুটি ধ্রুব সদিক রাশি পাই, $\underline{L}$ এবং $\underline{A}$। এর কারণ হল এই যে, কেন্দ্রীয় বলের অন্তর্নিহিত গাণিতিক দল (গ্রুপ) আসলে SO(4) প্রতিসাম্য। একেই 'গতিময় প্রতিসাম্য' আখ্যা দেয়া হয়েছে।

যেহেতু $\underline{A} \cdot \underline{r} = A r \cos\theta = \underline{r} \cdot (\underline{p} \times \underline{L}) - \mu k r = l^2 - \mu k r$, তাই পূর্বের মতই $r = L/(1+e\cos\theta)$ যেখানে $L = l^2/\mu k$ এবং $e = A/\mu k$। সুতরাং $A^2 = \mu^2 k^2 e^2 = \mu^2 k^2 + 2\mu l^2 E$ অর্থাৎ A রাশির মান সামগ্রিক শক্তির সঙ্গে সংশ্লিষ্ট।

গ্রহগতির সমস্যায় তাই দুটি ধ্রুব সদিক রাশি $\underline{L}$ ও $\underline{A}$ এবং একটি নিদিক রাশি E রয়েছে অর্থাৎ মোট সাতটি নিত্য রাশি। কিন্তু যেহেতু দুটি শর্ত $\underline{A} \cdot \underline{L} = 0$ এবং $A^2 = \mu^2 k^2 + 2\mu l^2 E$ রয়েছে তাই মোট পাঁচটি স্বতন্ত্র ধ্রুবরাশি থাকে।

দুটি বস্তু নিয়ে গঠিত একটি বস্তুনিচয়ের ৬টি গতিধ্রুবক থাকবে যার একটি দিয়ে অবশ্য অনসূয় বিন্দু অতিক্রম করার সময় নির্দেশ করা যায়। সুতরাং মোট পাঁচটি স্বতন্ত্র ধ্রুবক পাওয়া যায় যা দিয়ে গ্রহের কক্ষপথের আকার, আকৃতি এবং অবস্থান বর্ণনা করা যায়। এ সম্বন্ধে বিস্তৃত আলোচনা জ্যোতির্বিজ্ঞানের গ্রন্থে পাওয়া যাবে।

৪.৭ কক্ষপথের পেডাল বা পদমূল সমীকরণ



চিত্র : ৪.৮

ধরা যাক F কেন্দ্রীয় বলের অধীনে μ ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু কণিকার কক্ষপথের যে কোন বিন্দু P তে PM একটি স্পর্শক এবং কেন্দ্রীয় বল $\underline{F}$ স্থিরবিন্দু বা বল-কেন্দ্রের দিকাভিমুখী। P বিন্দুর মেরু স্থানাঙ্ক হল (r, θ) এবং S বিন্দু থেকে স্পর্শকের উপর লম্ব $SM = p$। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (p, r) কে পেডাল বা পদমূল স্থানাঙ্ক বলে।

P বিন্দুতে লম্বের দিকে বলের মান হল $\mu v^2/\rho$ যেখানে ρ ঐ বিন্দুতে বক্রতার ব্যাসার্ধ। যদি $\angle MPS$ কোণকে φ লেখা হয়, তাহলে

$$F \sin\varphi = \mu v^2 / \rho$$

কিন্তু কেন্দ্রীয় বলের গতির বৈশিষ্ট্য অনুসারে,

$$\mu p v = l$$

যেখানে l একটি ধ্রুব সংখ্যা। যেহেতু $\sin\varphi = p/r$ এবং $\rho = r\,dr/dp$,

$$F = \frac{l^2}{\mu p^3} \frac{dp}{dr} \qquad (৪.৩৭)$$

এখন বল F যদি p, r এর অপেক্ষক হিসেবে জানা থাকে তাহলে আমরা একটি প্রথম ঘাতের অন্তরকলনী সমীকরণ পাই। এর আগে (u, θ) স্থানাঙ্কে দ্বিতীয় ঘাতের অন্তরকলনী সমীকরণ নির্ধারণ করা হয়েছে (সমীকরণ ৪.১৭ দ্রষ্টব্য)। সুতরাং পদমূল সমীকরণ কোন কোন ক্ষেত্রে সহজেই সমাধান করা যায়।

বিভিন্ন ক্ষেত্রে (p, r) সমীকরণ নিচে দেয়া হল,

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{উপবৃত্ত} & \dfrac{b^2}{p^2} = \dfrac{2a}{r} - 1 & (8.৩৮\text{ক}) \\ \text{অধিবৃত্ত} & p^2 = \frac{1}{2} Lr & (8.৩৮\text{খ}) \\ \text{পরাবৃত্ত} & \dfrac{b^2}{p^2} = 1 + \dfrac{2a}{r} & (8.৩৮\text{গ}) \end{array}\right.$$

যেহেতু উপবৃত্তের সমীকরণ হল $L/r = 1 + e\cos\theta \quad (0 < e < 1)$, তাই $-(L/r^2)\, dr/d\theta = -e\sin\theta$। সুতরাং $\cot\varphi = (1/r)(dr/d\theta) = er\sin\theta/L$ এবং তাই $\cos\varphi = ep\sin\theta/L$। অতএব $(p/r)^2 + (ep\sin\theta/L)^2 = 1$ এবং

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{e^2\sin^2\theta}{L^2} = \frac{(1+e\cos\theta)^2 + e^2\sin^2\theta}{L^2}$$

সুতরাং $L = a(1-e^2)$ এবং $b = a\sqrt{1-e^2}$ ব্যবহার করে আমরা পাই,

$$\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1$$

এভাবে অন্য দুটি পদমূল সমীকরণও প্রতিষ্ঠা করা যায়।

এখন ধরা যাক কেন্দ্রীয় বল ব্যস্ত বর্গের আইন মেনে চলে,

$$F = \frac{k}{r^2}$$

সুতরাং

$$\frac{l^2}{\mu p^3}\frac{dp}{dr} = \frac{k}{r^2}$$

সমাকলন করে,

$$\frac{l^2}{2\mu p^2} = \frac{k}{r} + A$$

সুতরাং এই সমাকলনের ধ্রুবক A যদি ঋণাত্মক হয় $(A < 0)$ তবে কক্ষপথ একটি উপবৃত্ত; যদি A শূন্য হয় তবে তা অধিবৃত্ত এবং যদি $A > 0$ তবে কক্ষপথ একটি পরাবৃত্ত।

উপবৃত্তের ক্ষেত্রে,

$$-\frac{l^2}{2A\mu} = b^2 \qquad \text{এবং} \quad -\frac{k}{A} = 2a$$

সুতরাং

$$\frac{l^2}{2\mu p^2} = \frac{k}{r} - \frac{k}{2a}$$

অতএব

$$v^2 = \frac{l^2}{\mu^2 p^2} = \frac{k}{\mu}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

সহজেই দেখানো যায় যে $L = b^2/a = l^2/\mu k$ পূর্বের মতই এবং বেগ হল v যেখানে

উপবৃত্তের ক্ষেত্রে

$$v^2 = \frac{k}{\mu}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \qquad (8.৩৯ক)$$

পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে

$$v^2 = \frac{k}{\mu}\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right) \qquad (8.৩৯খ)$$

অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে

$$v^2 = \frac{2k}{\mu r} \qquad (8.৩৯গ)$$

পদমূল সমীকরণের একটি উদাহরণ হিসেবে, ধরা যাক একটি বস্তুকণা এমন এক বলের অধীনে সঞ্চরণশীল যে তার গতিপথ উপবৃত্তাকার কিন্তু বলের দিক ঐ উপবৃত্তের কেন্দ্রের মধ্য দিয়ে যায় (ফোকাসের মধ্য দিয়ে নয়)। এক্ষেত্রে মূলবিন্দু উপবৃত্তের কেন্দ্রে এবং পদমূল সমীকরণ হল,

$$\frac{a^2 b^2}{p^2} = a^2 + b^2 - r^2$$

সুতরাং

$$F = \frac{l^2}{\mu p^3}\frac{dp}{dr} = \frac{k}{a^3} r \qquad (8.80)$$

অর্থাৎ বল এক্ষেত্রে দূরত্বের সমানুপাতিক।

৪.৮ সাধারণ বিভবক্ষেত্রে কক্ষপথ

বিভব অপেক্ষক সাধারণভাবে নেয়া যায়,

$$U(r) = a r^{n+1} \qquad n \neq -1 \qquad (8.81)$$

সুতরাং কৌণিক রাশি θ হবে,

$$\theta = \theta_0 - l \int \frac{du}{\sqrt{2\mu E - 2\mu a u^{-n-1} - l^2 u^2}}$$

এই সমীকরণ কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রে সমাকলন করা যায়। যদি $-n-1 = 0, 1, 2$ হয়, তবে সমাকলন করার জন্য (৪.৩৩) সমীকরণের পদ্ধতি অবলম্বন করা যায়। যেহেতু $n = -1$ বাদ দেয়া যায় তাই n এর মান -2 এবং -3 (ব্যস্ত বর্গ এবং ব্যস্ত ত্রিঘাত আইন)।

যখন $n = 1$, অর্থাৎ সুষম স্পন্দকের বিভব নেয়া হয় তখন

$$\theta = \theta_0 - l \int \frac{du}{\sqrt{2\mu E - 2\mu a u^{-2} - l^2 u^2}}$$

$$= \theta_0 - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{2\mu E x - 2\mu a - l^2 x^2}}$$

এই সমাকলনকে আবার আগের মতোই সমাধান করা যায়।

যখন $n = -4$ এবং -5, তখন,

$$\theta = \theta_0 - l \int \frac{du}{\sqrt{2\mu E - 2\mu a (u^3, u^4) - l^2 u^2}}$$

এই ধরনের সমাকলনকে 'উপবৃত্তাকার সমাকলন' বলে, যাদের সমাধান হল উপবৃত্তাকার অপেক্ষক (elliptic function)।

দেখানো যায় $n = 5, 3, 1, 0, -2, -3, -5, -7$ হলে কক্ষপথ নির্ধারণ করা যায়। এটা একটা পরম আশ্চর্য ব্যাপার যে প্রকৃতি শুধু $n = -2$ পছন্দ করে নিয়েছে।

প্রথম শ্রেণীর উপবৃত্তাকার সমাকলন হল,

$$F(\varphi, k) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2(1+k^2) + k^2 x^2}}$$

এবং দ্বিতীয় শ্রেণীর উপবৃত্তাকার সমাকলন হল,

$$E(\varphi, k) = \int_0^x \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

এসব সমাকলনের মান 'সমাকলন-সারণী পুস্তকে' পাওয়া যায়।

৪.৯ যথার্থ বৈষম্য এবং উৎকেন্দ্রিক বৈষম্য

গ্রহের কক্ষপথের সমীকরণ হল

$$r = \frac{L}{1+e\cos\theta}$$

যেখানে $L = a(1-e^2)$ এবং θ কোণকে জ্যোতির্বিদ্যায় 'যথার্থ বৈষম্য' (true anomaly) বলে। যেহেতু

$$dt = \frac{2\mu}{l}\, dA \quad \text{এবং} \quad T = \frac{2\mu}{l} A = \frac{2\mu}{l} \pi ab,$$

তাই

$$t = \frac{T}{\pi ab} \int_0^\theta \tfrac{1}{2} r^2\, d\theta$$

কেননা মেরুবর্তী বা পোলার স্থানাঙ্কে $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$। সুতরাং

$$\frac{2\pi t}{T} = \frac{L^2}{ab} \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

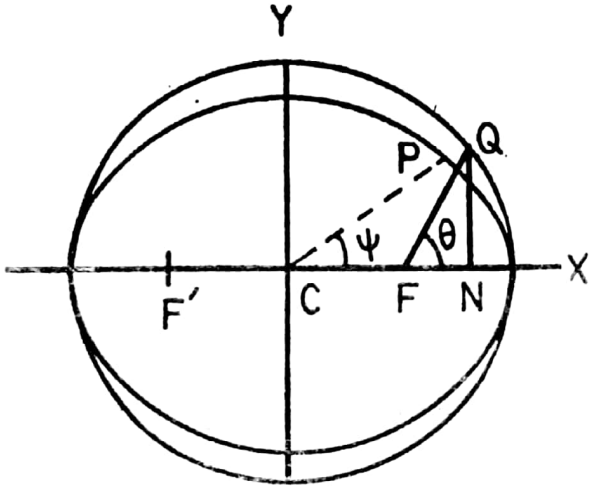
$$= 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\, \tan\frac{\theta}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta} \qquad (8.82)$$

উৎকেন্দ্রিকতা e খুব ছোট হলে এ সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,

$$\theta = \frac{2\pi t}{T} + 2e \sin \frac{t\omega 2}{T} + \frac{5}{4} e^2 \sin \frac{4\pi t}{T} + \cdots$$

কিন্তু গ্রহগতির জন্যে এই আসন্ন মান খুব উপযোগী নয়।

কেপলার এ প্রসঙ্গে একটি সুন্দর পদ্ধতি আবিষ্কার করেছিলেন। গ্রহের কক্ষপথ একটি উপবৃত্ত যার ফোকাস F বিন্দুতে সূর্যের অবস্থান (চিত্র ৪.৯)।



চিত্র : ৪.৯

এখন কার্টেশীয় স্থানাঙ্কে F বিন্দুকে মূল বিন্দু নিলে, উপবৃত্তের সমীকরণ হল

$$\frac{(x + ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

কেননা $CF = ae$। উপবৃত্তের অর্ধ-অধিঅক্ষ a ব্যাসার্ধ নিয়ে যদি একটি পরিবৃত্ত আঁকা যায় তবে উপবৃত্তের P বিন্দু এবং বৃত্তের Q বিন্দু একই সরলরেখা FQ তে নেয়া যায়। যেহেতু $\angle QCF = \psi$ (উৎকেন্দ্রিক বৈষম্য) এবং $CN = CF + FN = a\cos\psi = ae + x$, $PN = y$, অতএব উপবৃত্তের সমীকরণ থেকে $y = b \sin\psi$ অর্থাৎ

$$x = a(\cos\psi - e) \qquad y = a\sqrt{1-e^2}\sin\psi$$

সুতরাং

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = a(1 - e\cos\psi)$$

কিন্তু $er\cos\theta = a\,(1-e^2) - r$। সুতরাং দুদিকে er যোগ এবং বিয়োগ করে পাওয়া যায়,

$$r\,(1+\cos\theta) = a\,(1-e)\;(1+\cos\psi)$$

$$r\,(1-\cos\theta) = a\,(1-e)\;(1-\cos\psi)$$

অতএব

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\;\tan\frac{\psi}{2} \qquad (8.43)$$

এটাই যথার্থ এবং উৎকেন্দ্রিক বৈষম্যের মধ্যে সম্পর্ক। এই সমীকরণকে অন্তরকলন করে

$$d\theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\;\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\psi}{2}}\,d\psi$$

$$= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\;\frac{a\,(1-e)}{r}\,d\psi$$

সুতরাং

$$r^2\,d\theta = a^2\sqrt{1-e^2}\;\;1-e\cos\psi)\;d\psi$$

সমাকলন করে,

$$\frac{\pi ab}{T}\,t = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{2}\int_0^{\psi}(1-e\cos\psi)\,d\psi = \frac{ab}{2}\,(\psi - e\sin\psi)$$

বাঁ দিকের রাশিটির দ্বিগুণকে বলে 'গড় বৈষম্য' $M = 2\pi t / T$।

সুতরাং

$$M = \psi - e\sin\psi \qquad (8.44)$$

এই সমীকরণকে কেপলারের সমীকরণ বলে। যে কোন সময়ে গ্রহের অবস্থান জানার জন্যে পরীক্ষণলব্ধ M এর মান ব্যবহার করে কেপলারের সমীকরণ থেকে ψ এবং তারপর (8.43) সমীকরণ থেকে θ নির্ধারণ করা যায়। অবশ্য কেপলারের সমীকরণ সমাধান করার জন্য আসন্ন মান ব্যবহার করতে হয়।

ধরা যাক $\psi = M + e \sin \psi = M + \rho$ যেখানে ρ একটি ক্ষুদ্র রাশি কেননা e ক্ষুদ্র সংখ্যা। সুতরাং (8.88) সমীকরণ $\rho = e \sin (M + \rho)$ প্রসার করে পাওয়া যায়,

$$\sin \rho = \sin [e \sin (M + \rho)]$$

$$= e \sin (M + \rho) - \frac{e^3}{3i} \sin^3 (M + \rho) \ldots$$

অতএব,

$$\sin \rho (1 - e \cos M) - e \cos \rho \sin M = - \frac{e^3}{6} \sin^3 (M+\rho) + \ldots$$

এবং

$$\sin (\rho - \rho_1) = - \frac{e^3}{6\eta} \sin^3 (M+\rho_1)$$

$$= - \frac{e^3}{6} \sin^3 (M+\rho_1) (1 + e \cos M)$$

যেখানে

$$\eta \sin \rho_1 = e \sin M \qquad \eta \cos \rho_1 = 1 - e \cos M$$

এই সমীকরণ থেকে M এর মান জানা থাকলে ρ এর মান পাওয়া যায়।

৪.১০ উপগ্রহের কক্ষপথ

দুটি বস্তু পারস্পরিক আকর্ষণী বলের অধীনে গতিশীল হলে, তাদের লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হল

$$L = \tfrac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - U(r)$$

যেখানে μ হল সমতুল ভর এবং $\underline{r}$ বস্তুদ্বয়ের আপেক্ষিক দূরত্ব। সুতরাং গতি-সমীকরণ হল,

$$\ddot{\underline{r}} = - G_N (M+m) \frac{\underline{r}}{r^3}$$

যেখানে নিউটনের মাধ্যাকর্ষণীয় ব্যস্তবর্গের আইন নেয়া হয়েছে। উপগ্রহের ভর m এবং পৃথিবীর ভর M_E হলে, আমরা লিখতে পারি,

$$\ddot{\underline{r}} = - \frac{K}{r^3} \underline{r} \qquad (8.8\text{৫})$$

যেখানে $K = G_N (M_E + m)$। যেহেতু $M_E \gg m$, $K = G_N M_E$।

এখন (8.8৫) সমীকরণকে $2\dot{\underline{r}}$ দিয়ে নিদিক গুণ করে লেখা যায়,

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\underline{r}}^2\right) = -\frac{2K}{r^3}\,\underline{r}\cdot\dot{\underline{r}} = -\frac{K}{r^3}\frac{d}{dt}\left(\underline{r}^2\right) = -\frac{K}{r^3}\,2r\dot{r}$$

সুতরাং

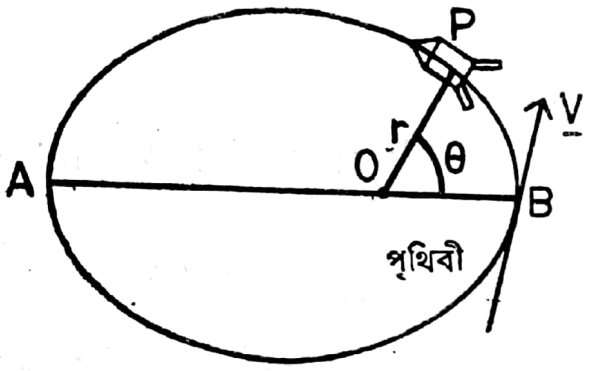
$$\dot{r}^2 = \frac{2K}{r} + A$$

যেখানে A হল সমাকলন ধ্রুবক। সুতরাং $A = -K/a$ নিলে আমরা একটি উপবৃত্ত, $A = 0$ নিলে একটি অধিবৃত্ত এবং $A = K/a$ নিলে একটি পরাবৃত্ত পাই। উপরের সমীকরণে $E = mA/2$ লিখে আমরা পাই,

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{G_N M_E m}{r} = E$$

যা উপগ্রহের শক্তি সমীকরণ। উপগ্রহের কক্ষপথের অপদূরক দূরত্বে উপগ্রহের গতিবেগ তার অবস্থান সদিক রাশির উপর লম্ব,

$$\underline{r}\cdot\dot{\underline{r}} = 0$$



চিত্র ঃ 8.১০

যেহেতু $\underline{r}\cdot\dot{\underline{r}} = r\dot{r}$, তাই অপদূরক দূরত্বে $\dot{r} = 0$। সুতরাং পৃথিবী থেকে উপগ্রহের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন দূরত্ব হল অপদূরক দূরত্ব। পৃথিবীর নিকটতম অপদূরক দূরত্বকে বলে অনুভূ (perigee) এবং সর্বোচ্চ অপদূরক দূরত্বকে বলে অপভূ (apogee)। 8.১০ চিত্রে অনুভূ হল $OB = r_1$ এবং অপভূ হল $OA = r_2$।

কেন্দ্রীয় বলের অধীনে সাধারণ বৈশিষ্ট্য অনুসারে উপগ্রহের কৌণিক ভরবেগ ধ্রুবরাশি,

$$\mu r^2 \dot{\theta} = l$$

কেননা মেরুবর্তী স্থানাঙ্ক (r, θ) পদ্ধতিতে, যে কোন বিন্দুতে উপগ্রহের গতিবেগ $\underline{v}$ কে ব্যাসার্ধের দিকে $\dot{r}$ এবং স্পর্শকের দিকে $r\dot{\theta}$ এই দুটি উপাংশে ভাগ করা যায়। সুতরাং

$$E = \tfrac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{mK}{r}$$

$$= \tfrac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{m^2 r^2}\right) - \frac{mK}{r}$$

অপদূরক দূরত্বে $\dot{r} = 0$ সুতরাং r_1 এবং r_2 হল নিচের দ্বিঘাত সমীকরণের মূল,

$$r^2 + \frac{mK}{E} r - \frac{l^2}{2Em} = 0$$

অতএব $r_1 + r_2 = 2a = -mK/E$ অর্থাৎ উপগ্রহের কক্ষপথের অর্ধ-পরাক্ষ হল $a = -mK/2E$।

উদাহরণ ১

একটি উপগ্রহ পৃথিবীর চারদিকে সুষম গতিতে NR_E ব্যাসার্ধের বৃত্তে ঘোরে যেখানে পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R_E এবং $N > 1$। কোন এক সময়ে উপগ্রহের গতির দিক পৃথিবীর দিকে α কোণে পরিবর্তন করা হল গতিবেগের কোন পরিবর্তন না করেই। ঐ কোণটি নির্ধারণ করতে হবে এমনভাবে যাতে উপগ্রহের কক্ষপথ ভূ-পৃষ্ঠকে স্পর্শ করে।

যেহেতু NR_E ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার কক্ষপথের যে কোন বিন্দুতে গতিবেগ v হলে উপগ্রহের ত্বরণ হয় v^2 / NR_E যা পৃথিবীর কেন্দ্রাভিমুখী এবং উপগ্রহের উপর পৃথিবীর আকর্ষণ হল $G_N mM_E/(NR_E)^2$; সুতরাং উপগ্রহের গতিসমীকরণ হল

$$\frac{G_N mM_E}{(NR_E)^2} = \frac{mv^2}{NR_E}$$

এবং তার সামগ্রিক শক্তি হল

$$E = \tfrac{1}{2} mv^2 - \frac{G_N M_E m}{NR_E}$$

$$= -\tfrac{1}{2}G_N \frac{mM_E}{NR_E}$$

উপগ্রহের সামগ্রিক শক্তি E ধ্রুব কিন্তু কক্ষপথের পরিবর্তনের পর কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন হয়। এই পরিবর্তনের ফলে উপগ্রহের গতিবেগ এখন পৃথিবীর কেন্দ্রবিন্দু O থেকে $NR_E \cos\alpha$ দূরত্বে একটি স্পর্শকের দিকে হবে। সুতরাং ঐ পরিবর্তনের পরে কৌণিক ভরবেগের ধ্রুব মান হল,

$$l = mvNR_E \cos\alpha = m\sqrt{NR_EK}\cos\alpha$$

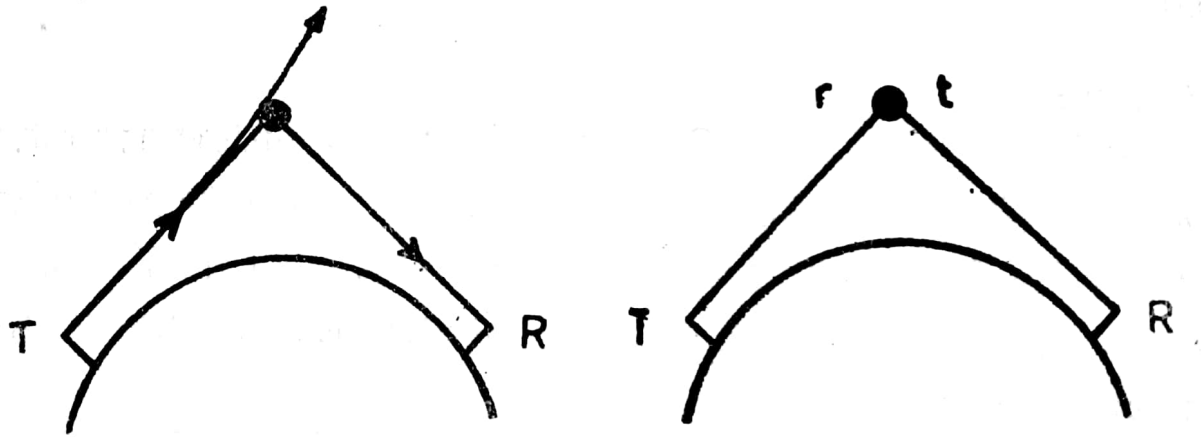
সুতরাং r এর দ্বিঘাত সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$r^2 - 2NR_E r + (NR_E)^2 \cos^2\alpha = 0$$

এখন উপগ্রহের নতুন গতিপথ পৃথিবীকে স্পর্শ করতে হলে, $r = R_E$। অতএব এই সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়, $\cos\alpha = \sqrt{2N-1}/N$।

উদাহরণ ২ ঃ যোগাযোগ উপগ্রহ

পৃথিবীপৃষ্ঠের এক বিন্দু থেকে অন্য বিন্দুতে সঙ্কেত পাঠানোর জন্য দু'ধরনের যোগাযোগ উপগ্রহ ব্যবহার করা হয়। ৪.১১ চিত্রে প্রথমটি হল নিষ্ক্রিয়



চিত্র ঃ ৪.১১

পদ্ধতি এবং দ্বিতীয়টি সক্রিয় পদ্ধতি। নিষ্ক্রিয় পদ্ধতিতে প্রেরক স্থান T থেকে সঙ্কেত পাঠিয়ে উপগ্রহ থেকে শুধু প্রতিফলিত করে প্রাপক স্থান R-এ ধরা হয়। সক্রিয় পদ্ধতিতে প্রেরিত সঙ্কেত উপগ্রহের r বিন্দুতে ধরা হয় এবং উপগ্রহস্থিত যন্ত্রের মাধ্যমে সঙ্কেত বাড়ানো হয়। বর্ধিত সঙ্কেতকে উপগ্রহের t বিন্দু থেকে প্রাপক স্থানে পাঠানো হয়। উভয় পদ্ধতিতেই উপগ্রহ পৃথিবীর সাপেক্ষে স্থির অথবা গতিশীল থাকতে পারে।

পৃথিবীর সাপেক্ষে স্থির থাকলে, উপগ্রহ পৃথিবীর চারদিকে বৃত্তাকার কক্ষপথে ঘোরে। সুতরাং $R_E + x$ ব্যাসার্ধের বৃত্তে ঘোরার পর্যায়কাল হল (সমীকরণ ৪.২৭ দেখ)

$$T = 2\pi\sqrt{\mu/k}\ (R_E + x)^{3/2}$$

সুতরাং

$$x = -R_E + (T/2\pi)^{2/3}\ (G_N M_E)^{1/3}$$

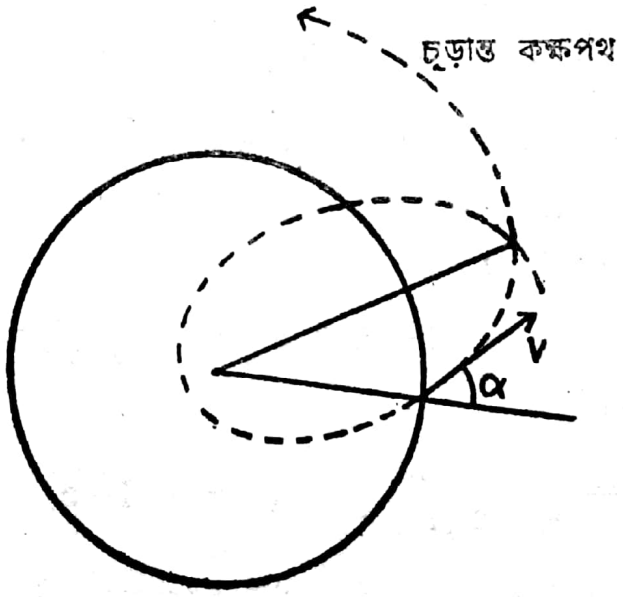
ধরা যাক, উপগ্রহের পর্যায়কাল ১ দিন বা $T = 8.64 \times 10^4$ সেকেণ্ড। যেহেতু $M_E = 5.976 \times 10^{24}$ কিলোগ্রাম, $G_N = 6.673 \times 10^{-11}$ (মিটার)$^3\times$ (সেকেণ্ড)$^{-2}$/কি. গ্রাম, এবং $R_E = 6368$ কিলোমিটার, তাই $x = 3.58 \times 10^4$ কিলোমিটার। এখন উপগ্রহটি পৃথিবীর বিষুবীয় তলে বৃত্তাকারে ঘোরে এবং বিষুবরেখার সঙ্গে 2α কোণ করে তাহলে

$$\cos\alpha = \frac{R_E}{x + R_E} = \frac{6368}{42140}$$

অর্থাৎ α কোণ ৮১° এবং উপগ্রহটি ১৬২° কোণের মধ্যে যোগাযোগ সম্পন্ন করতে পারে। সুতরাং বিষুবরেখার উপরে সকল স্থানের মধ্যে যোগাযোগ স্থাপন করার জন্যে দুটি উপগ্রহই যথেষ্ট।

উদাহরণ ৩

পৃথিবীপৃষ্ঠের লম্বের সঙ্গে α কোণে V গতিবেগে একটি দুই ধাপবিশিষ্ট রকেট উৎক্ষেপণ করা হল। তার প্রাথমিক কক্ষপথের অপভূ বিন্দুতে দ্বিতীয় পর্যায়ের



চিত্র ঃ ৪.১২

রকেট জ্বালিয়ে উপগ্রহকে কক্ষপথে স্থাপন করা হল। কক্ষপথ বৃত্তাকার হতে হলে অপভূ বিন্দুতে অতিরিক্ত কত গতির প্রয়োজন হবে?

উপবৃত্তাকার কক্ষপথের যে কোন বিন্দুতে গতিবেগ,

$$v^2 = G_N (M_E + m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

সুতরাং

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{R_E} - \frac{V^2}{M}$$

যেখানে $M = G_N (M_E + m) = G_N M_E$ । কৌণিক ভরবেগ ধ্রুবক

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} = V \sin \alpha R_E = m\sqrt{ML}$$

যেখানে L হল অর্ধ ল্যাটাসরেক্টাম, $L = a(1 - e^2)$।

প্রাথমিক কক্ষপথের সমীকরণ লেখা যায়

$$\frac{L}{r} = e \cos(\theta - \theta_o) + 1$$

যেহেতু এই কক্ষপথ উৎক্ষেপণ স্থানের মধ্য দিয়ে যায়, তাই

$$\frac{L}{R_E} = e \cos \theta_o + 1$$

অপভূ বিন্দুতে $r = a(1 + e)$, তাই সেখানে গতিবেগ হল,

$$v_a^2 = M\left(\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a}\right) = \frac{M(1-e)}{a(1+e)}$$

উপগ্রহকে বৃত্তাকার কক্ষপথে স্থাপন করতে হলে গতিবেগ করতে হবে

$$v_c^2 = \frac{M}{a(1+e)}$$

কেননা বৃত্তাকার কক্ষপথের ব্যাসার্ধ হবে $a(1 + e)$ (চিত্র ৪.১২)। সুতরাং গতিবেগ বৃদ্ধির পরিমাণ

$$v_c - v_a = \sqrt{\frac{M}{a(1+e)}}\ (1 - \sqrt{1-e})$$

পৃথিবীর জন্যে $M = 4.0 \times 10^{14}$ (মিটার)^3 / (সেকেণ্ড)^2 এবং $R_E = 6400$ কি.মি। রকেট যদি প্রাথমিকভাবে প্রতি সেকেণ্ডে 6 কি.মি গতিবেগে $\alpha = 30°$

কোণে উৎক্ষেপণ করা হয়, তাহলে আমরা পূর্বের সমীকরণগুলি থেকে পাই,

$a = 4.5 \times 10^6$ মি. $L = 9.2 \times 10^5$ মি.

$e = 0.89$ $v_a = 2.3 \times 10^3$ মি/সে.

$v_c = 6.8 \times 10^3$ মি./সে.

সুতরাং রকেটের অতিরিক্ত গতিবেগের পরিমাণ হল 4.5 কি মি./সে.। গ্রহগতি সংক্রান্ত তথ্য নিচের সারণীতে দেয়া হল।

সারণী

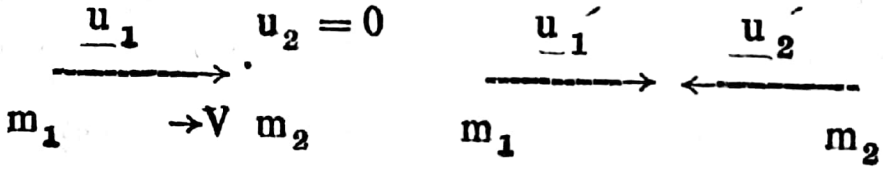
জ্যোতিষ্কের নাম	ভর (পৃথিবীর ভর=১ একক)	সূর্যের চারদিকে পর্যায় কাল (পৃথিবীর পর্যায় কাল=১ একক)	অর্ধ পরাক্ষ (পৃথিবীর দূরত্ব=১ একক)	উৎকেন্দ্রিকতা	গড় ব্যাস (পৃথিবীর ব্যাস=১ একক)	নক্ষত্র পর্যায় কাল (পৃথিবীর ঘূর্ণন পর্যায়কাল=১ একক)
সূর্য	৩৩১, ৯৫০.০	—	—	—	১০৯.১৮৭	২৪.৬৫
চন্দ্র	০.০১২	—	—	—	০.২৭৩	২৭.৩২
বুধ	০.০৫	০.২৪১	০.৩৮৭	০.২০৬	০.৩৬৬	০.৫৯
শুক্র	০.৮১	০.৬১৫	০.৭২৩	০.০০৭	০.৯৬০	৩০.০(?)
পৃথিবী	৫.৯৭৬×$10^{২৪}$ কি.গ্রা.	৩৬৫.২৫৬ দিন	১৪৯.৫×10^6 কি মি	০.০১৭	১২,৭৩৫ কি মি	২৩ঘ. ৫৬ মি.
মঙ্গল	০.১১	১.৮৮	১.৫২৪	০.০৯৩	০.৫৩১	১.০২৯
বৃহস্পতি	৩১৮.৪	১১.৮৬২	৫.২০৩	০.০৪৮	১০.৯৬৯	০.৪১১
শনি	৯৫.৩	২৯.৪৫৮	৯.৫৩৯	০.০৫৬	৯.০৩৬	০.৪১৯
ইউরেনাস	১৪.৫	৮৪.০১৫	১৯.১৮২	০.০৪৭	৩.৭১৫	০.৪৪৯
নেপচুন	১৭.২	১৬৪.৭৮৮	৩০.০৫৮	০.০০৯	৩.৫৩৮	০.৬৬
প্লুটো	?	২৪৭.৬৯৭	৩৯.৫১৮	০.২৪৯	?	?

৪.১১ দুটি বস্তুকণা সংঘর্ষের সম্পর্কাবলী

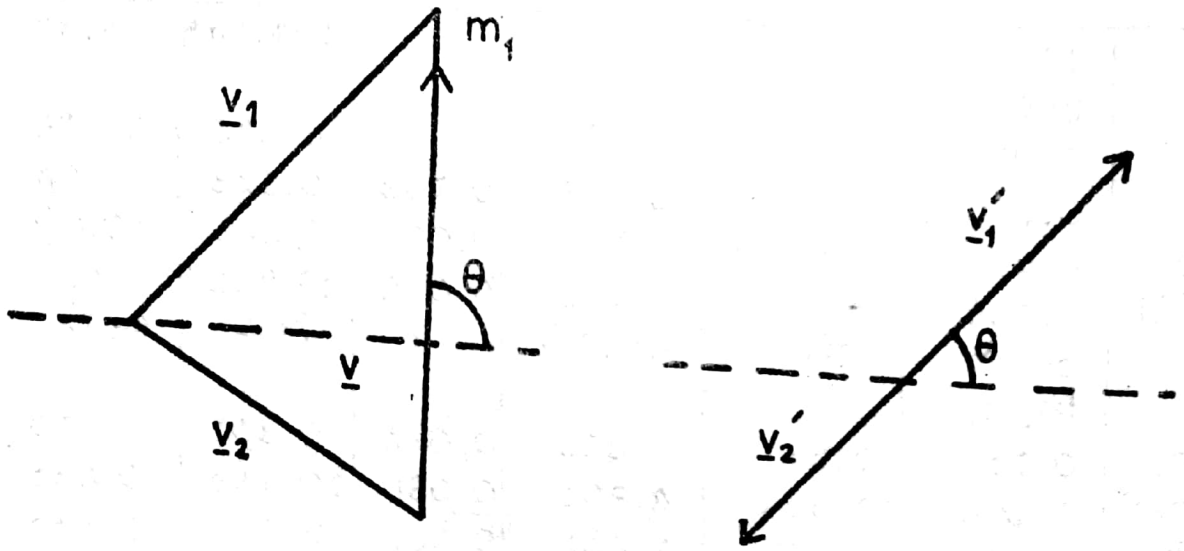
দুটি বস্তুকণার মধ্যে সংঘর্ষ ঘটলে একটির সাপেক্ষে অন্যটির গতি উভয়ের মধ্যে মিথস্ক্রিয়ার আইন দ্বারা নিয়ন্ত্রিত হয়। প্রাথমিকভাবে এই আইন জানা না থাকলেও এই আইন সম্বন্ধে আমরা অনেক কিছুই বস্তুদ্বয়ের বিক্ষেপণ প্রক্রিয়া থেকে জানতে পারি। বিক্ষেপণ প্রক্রিয়ার গুরুত্বপূর্ণ রাশি হল দুটি—সামগ্রিক শক্তি এবং বিক্ষেপণ কোণ। পরীক্ষণ পদার্থবিজ্ঞানে এই দুটি রাশিই নির্ধারণ করা থাকে।

পরীক্ষাগার এবং ভর-কেন্দ্র পদ্ধতি

পরীক্ষণ পদার্থবিজ্ঞানে দুটি স্থানাঙ্ক পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়—পরীক্ষাগার পদ্ধতি এবং ভরকেন্দ্র পদ্ধতি। পরীক্ষাগার পদ্ধতিতে যে বস্তুকণাকে আঘাত করা হবে (লক্ষ্যবস্তু) সেটি বিক্ষেপণের আগে স্থির থাকে এবং যে বস্তুকণা আঘাত করে (নিক্ষিপ্ত বস্তু) সেটি কোন গতিবেগে গতিশীল। অপরদিকে ভরকেন্দ্র পদ্ধতিতে লক্ষ্যবস্তু এবং নিক্ষিপ্ত বস্তু পরস্পরের দিকে গতিশীল হয় যাতে ভরকেন্দ্র স্থির থাকে।



বিক্ষেপণের পূর্বে



বিক্ষেপণের পরে

পরীক্ষাগার পদ্ধতি ভরকেন্দ্র পদ্ধতি

চিত্র ঃ ৪.১৩

পরীক্ষাগার পদ্ধতিতে, ধরা যাক, m_1 ভরবিশিষ্ট নিক্ষিপ্ত বস্তু বিক্ষেপণের পূর্বে ও পরে যথাক্রমে $\underline{u}_1$ এবং $\underline{v}_1$ গতিবেগে এবং m_2 ভরবিশিষ্ট লক্ষ্য-বস্তু বিক্ষেপণের পূর্বে ও পরে যথাক্রমে $\underline{u}_2 = 0$ এবং $\underline{v}_2$ গতিবেগে গতিশীল।

পরীক্ষাগারে কোন মূলবিন্দুর সাপেক্ষে ভরকেন্দ্রের অবস্থান সদিক রাশি $\underline{R}$ হলে সংজ্ঞানুসারে,

$$m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2 = (m_1 + m_2) \underline{R}$$

অন্তরকলন করে,

$$m_1 \underline{u}_1 + m_2 \underline{u}_2 = (m_1 + m_2) \underline{V}$$

যেখানে $\underline{V}$ হল ভরকেন্দ্রের গতিবেগ। যেহেতু $\underline{u}_2 = 0$

$$\underline{V} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \underline{u}_1 = \frac{\mu}{m_2} \underline{u}_1$$

যেখানে μ হল সমতুল ভর।

ভরকেন্দ্র পদ্ধতিতে বিক্ষেপণের পূর্বে বস্তু দুটির গতিবেগ হল $\underline{u}_1'$ এবং $\underline{u}_2'$ এবং বিক্ষেপণের পরে তা হল $\underline{v}_1'$ এবং $\underline{v}_2'$। এই পদ্ধতিতে লক্ষ্যবস্তুর উপর আমরা $-\underline{V}$ গতিবেগ আরোপ করি এবং ফলে তার গতিবেগ হয়,

$$\underline{u}_2' = -\underline{V}$$

সংজ্ঞানুসারে সামগ্রিক রৈখিক ভরবেগ হল,

$$m_1 \underline{u}_1' + m_2 \underline{u}_2' = 0$$

কেননা ভরকেন্দ্র প্রণালীতে ভরকেন্দ্রের গতিবেগ শূন্য। সুতরাং

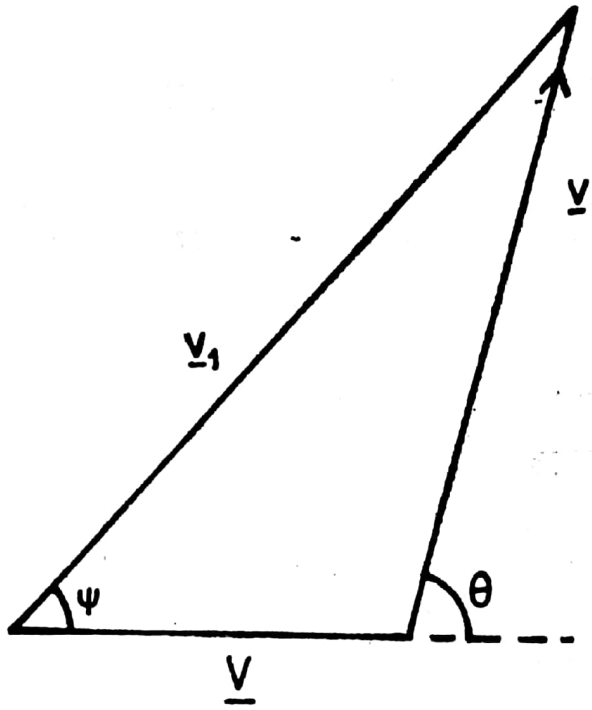
$$\underline{u}_1' = \frac{m_2}{m_1} \underline{V}$$

আবার $\underline{V}$ সদিক রাশির মান হল $\mu u_1 / m_2$। সুতরাং $\underline{u}_1'$ সদিক রাশির মান হল $\mu u_1 / m_1$ এবং $\underline{u}_2'$ সদিক রাশির মান হল $\mu u_1 / m_2$।

এখন স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের সংজ্ঞা হল এই যে এ সংঘর্ষে অভ্যন্তরীণ শক্তির কোন পরিবর্তন হয় না, শুধু বস্তুকণাদ্বয়ের দ্রুতির দিক পরিবর্তন হয়। সুতরাং

$$v_1' = \mu \frac{u_1}{m_1} \qquad v_2' = \mu \frac{u_1}{m_2}$$

ধরা যাক m_1 এবং m_2 ভরের সংযোগকারী সরলরেখা ভরকেন্দ্র পদ্ধতিতে θ কোণে বেঁকে যায় এবং পরীক্ষাগার পদ্ধতিতে m_1 কণা ψ কোণে বেঁকে যায়।



চিত্র ঃ 8.১৪

যেহেতু $\underline{V}$ এবং $\underline{v}_1'$ সদিক রাশির লব্ধি $\underline{v}_1$,

$$\underline{V} + \underline{v}_1' = \underline{v}_1$$

সুতরাং

$$v_1' \sin\theta = v_1 \sin\psi \qquad V + v_1' \cos\theta = v_1 \cos\psi$$

অতএব

$$\tan\psi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + m_1/M_2}$$

কেননা $V/v_1' = (\mu u_1/m_2)/(\mu u_1/m_1)$। এই সমীকরণ দিয়ে পরীক্ষাগারে বিক্ষেপণ কোণ ψ এবং ভরকেন্দ্র পদ্ধতির বিক্ষেপণ কোণ θ-র সম্পর্ক পাওয়া যায়।

ধরা যাক φ হল প্রত্যাগতি-কোণ অর্থাৎ পরীক্ষাগারে লক্ষ্যবস্তু φ কোণে বেঁকে যায়। সুতরাং পূর্বের মতোই,

$$\underline{V} + \underline{v}_2' = \underline{v}_2$$

এবং
$$v_2' \sin\theta = v_2 \sin\varphi \qquad V - v_2' \cos\theta = v_2 \cos\varphi$$

সুতরাং
$$\tan\varphi = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \cot\frac{\theta}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$$

অর্থাৎ $\varphi = \pi/2 - \theta/2$ ।

পরীক্ষাগারে বিক্ষেপণের পূর্বে গতিশক্তি হল
$$T_0 = \tfrac{1}{2} m_1 u_1^2$$

এবং ভরকেন্দ্র পদ্ধতিতে প্রাথমিক গতিশক্তি হল
$$T'_0 = \tfrac{1}{2}(m_1 u_1'^2 + m_2 u_2'^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right) V^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\mu u_1^2 = \frac{\mu}{m_1} T_0$$

সুতরাং ভরকেন্দ্র পদ্ধতিতে প্রাথমিক গতিশক্তি পরীক্ষাগার পদ্ধতির গতিশক্তির ভগ্নাংশ।

একইভাবে ভরকেন্দ্র পদ্ধতির চূড়ান্ত গতিশক্তি হল,
$$T_1' = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 T_0$$
$$T_2' = \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} T_0$$

পরীক্ষাগার পদ্ধতিতে বিক্ষেপণের পর গতিশক্তি হল T_1 এবং T_2 যেখানে
$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{v_1^2}{u_1^2} \qquad \frac{T_2}{T_0} = 1 - \frac{T_1}{T_0}$$

যেহেতু $v_1'^2 = v_1^2 + V^2 - 2v_1 V \cos\psi$,

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{v_1'^2 - V^2 + 2v_1 V\cos\psi}{u_1^2}$$

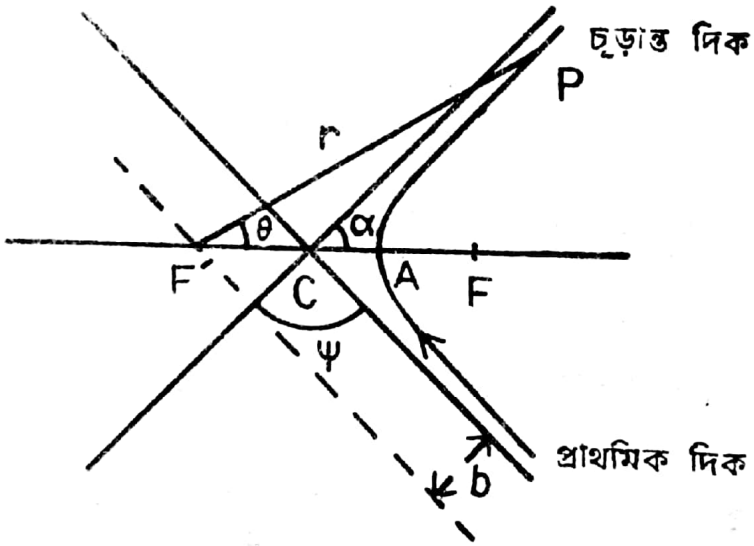
$$= \left(\frac{\mu}{m_1^2}\right)^2 - \left(\frac{\mu}{m_2}\right)^2 + 2v_1' \frac{\sin\theta}{\sin\psi}\frac{V}{u_1^2}\cos\psi$$

$$= \mu^2\left(\frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2}\right) + 2\frac{\mu^2}{m_1 m_2}\sin\theta\cot\psi$$

$$= 1 - \frac{2m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}(1-\cos\theta)$$

৪.১২ বিকর্ষণী বলকেন্দ্র থেকে বিক্ষেপণ

বিক্ষেপণ পরীক্ষণে একটি বস্তুকণা আরেকটি স্থির বস্তুকণার দিকে নিক্ষেপ করা হয় এবং উপযুক্ত যন্ত্রে বিক্ষিপ্ত বস্তুকণার বেঁকে যাওয়ার পরিমাণ মাপা হয়।



চিত্র ঃ ৪.১৫

সূচনায় নিক্ষিপ্ত বস্তু লক্ষ্যবস্তু থেকে বহু দূরে থাকে এবং যেহেতু শক্তি E ধনাত্মক তাই বস্তুকণার গতিপথ হবে মুক্ত। যখন বস্তুকণা বলকেন্দ্র F′ এর নিকটতম দূরত্ব A বিন্দুতে আসে তখন তার রৈখিক গতিবেগ ($\dot{r}$) শূন্য। বস্তুকণাটি তখন বলকেন্দ্রের জন্যে বেঁকে যায় এবং যে পথে সে দূরে চলে যায় তা প্রাথমিক দিকের সঙ্গে ψ কোণ করে। এই ψ কোণকে বিক্ষেপণ কোণ বলে।

ধরা যাক m ভরের বস্তুকণা F′ বলকেন্দ্রের দিকে প্রাথমিক গতিবেগ v_0-তে নিক্ষিপ্ত হয়। যদি কোন বলকেন্দ্র অর্থাৎ কোন লক্ষ্যবস্তু না থাকত, তাহলে নিক্ষিপ্ত

বস্তুকণা F' বিন্দুর যে নিকটতম দূরত্ব দিয়ে যায় তাকে বলে সংঘাত প্যারামিটার b (impact parameter)। যেহেতু সমগ্র বস্তুনিচয়টি সংরক্ষণশীল, তাই সামগ্রিক শক্তি ধ্রুব থাকবে এবং কেন্দ্রীয় বলের বৈশিষ্ট্য অনুযায়ী, কৌণিক ভরবেগও সংরক্ষিত হবে।

সুতরাং

$$E = \tfrac{1}{2}m\, v_0^2 = \text{ধ্রুবরাশি}$$

এবং

$$mv_0 b = l = \text{ধ্রুবরাশি}$$

এখন ৪.১৫ চিত্র থেকে দেখা যায় যে প্রাথমিক এবং চূড়ান্ত গতিপথের অসীমতট দুটি C বিন্দুতে মিলিত হয়ে ψ কোণ উৎপন্ন করে। চূড়ান্ত দ্রুতির দিক প্রতিসাম্য অক্ষ অর্থাৎ বলকেন্দ্র থেকে নিকটতম আগমনের সংযোগকারী রেখার সঙ্গে α কোণ করে। সুতরাং

$$\psi + 2\alpha = \pi$$

যেহেতু বল বিকর্ষণ ধর্মী এবং সাধারণ ব্যস্ত-বর্গ প্রকৃতির, তাই

$$f(r) = \frac{k}{r^2} \qquad k > 0$$

এবং বিভবশক্তি হল

$$U = \frac{k}{r} = ku$$

যেখানে $u = 1/r$। এখন P বিন্দুর মেরুবর্তী স্থানাঙ্ক (r, θ) নিলে (F' মূলবিন্দু), আমরা জানি

$$\theta = \theta_0 - l \int \frac{du}{\sqrt{2m(E - ku) - l^2 u^2}}$$

সমাকলন করে,

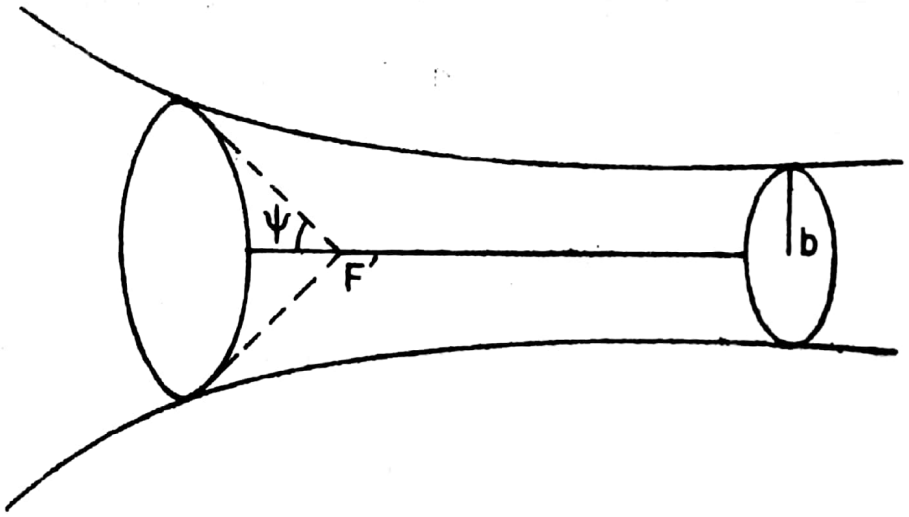
$$u = \frac{e\cos\theta - 1}{L}$$

যেখানে $L = l^2 / mk$, $e = \sqrt{1 + 2El^2 / mk^2}$ এবং θ_0-কে শূন্য নেয়া হয়েছে।

যেহেতু $E > 0$ তাই $e > 1$ এবং সে ক্ষেত্রে গতিপথ একটি পরাবৃত্ত। কিন্তু u ধনাত্মক এবং তাই

$$\cos\theta \geq \frac{1}{e}$$

এখন বিক্ষেপণ সম্ভাবনা বা বিক্ষেপণ প্রস্থচ্ছেদ-এর সংজ্ঞা দেয়া যাক। আমরা m ভর এবং E শক্তির বস্তুকণার একটি রশ্মি দিয়ে একটি M ভরবিশিষ্ট লক্ষ্য-বস্তুকে বর্ষণাঘাত করি। নিক্ষিপ্ত বস্তুকণার রশ্মির তীব্রতা বা ফ্লাক্স I হল রশ্মির



চিত্র ঃ ৪.১৬

উপর লম্ব একক ক্ষেত্রের মধ্য দিয়ে প্রতি সেকেন্ডে যতগুলি বস্তুকণা যায় তার সংখ্যা। ধরা যাক নিক্ষিপ্ত বস্তুকণাগুলি লক্ষ্য বস্তুকণা থেকে ψ কোণে বিক্ষিপ্ত হয়। এখন $d\Omega = 2\pi \sin\psi d\psi$ ঘন কোণের (চিত্র ৪.১৬) মধ্য দিয়ে dN সংখ্যক বস্তুকণা বিক্ষিপ্ত হয়, তাহলে প্রতি একক ঘন কোণে বিক্ষিপ্ত বস্তু-কণার সংখ্যা হল $dN/d\Omega$ এবং এই সংখ্যাকে নিক্ষিপ্ত তীব্রতা I দিয়ে ভাগ করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তাকেই বিক্ষেপণের অন্তরকলনী প্রস্থচ্ছেদ বলে,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN/d\Omega}{I} = \frac{1}{I}\ \frac{1}{2\pi\sin\psi}\ \frac{dN}{d\psi}$$

কিন্তু চিত্র ৪.১৬ থেকে দেখা যায় যে সংঘাত প্যারামিটার b এবং $b + db$-র সংশ্লিষ্ট বস্তুকণাগুলিই ψ কোণে $d\psi$ কৌণিক ব্যাপ্তির মধ্য দিয়ে বিক্ষিপ্ত হয়। সুতরাং যেহেতু db বেধের আংটির ক্ষেত্রফল হল $2\pi bdb$,

তাই

$$dN = I.\ 2\pi b db$$

$$= -\ I\ 2\pi \sin\psi\ d\psi\ \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

এখানে বিয়োগ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে কেননা b যখন বাড়ে, ψ তখন কমে। সুতরাং

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\psi}\left|\frac{db}{d\psi}\right|$$

যেহেতু বিক্ষেপণ সম্ভাবনা ঋণাত্মক হতে পারে না। কিন্তু $\cos\alpha = \frac{1}{e}$ এবং এবং $2\alpha + \psi = \pi$, সুতরাং

$$\cot\frac{\psi}{2} = \tan\alpha = \sqrt{e^2 - 1} = \sqrt{2El^2/mk^2}$$

$$= \frac{2Eb}{k}$$

অথবা

$$b = \frac{k}{2E}\cot\frac{\psi}{2}$$

অতএব

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\psi}\ \frac{k}{2E}\ \tfrac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\ \frac{\psi}{2}$$

$$= \frac{k^2}{16E^2}\ \operatorname{cosec}^2\ \frac{\psi}{2}$$

আলফা কণা এবং কেন্দ্রীনের বিক্ষেপণের ক্ষেত্রে কুলুম্ব আইন অনুসারে $k = ZZ'e^2$ এবং সেক্ষেত্রে উপরের সমীকরণই হল রাদারফোর্ডের বিখ্যাত সমীকরণ।

প্রশ্নমালা

১। দুটি পরস্পরের প্রতি আকর্ষণশীল m_1 এবং m_2 ভরবিশিষ্ট বস্তু r_0 দূরত্বে অবস্থিত এবং স্থির অবস্থা থেকে তাদের মুক্ত করা হল। দেখাও যে

পরস্পরের দূরত্ব যখন $r\ (<r_0)$, তখন বেগের মান হল

$$v_1 = m_2\sqrt{\frac{2G_N}{M}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)} \qquad v_2 = m_1\sqrt{\frac{2G_N}{M}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}$$

যেখানে G_N নিউটনীয় মাধ্যাকর্ষণ ধ্রুবক এবং $M = m_1 + m_2$।

২। একটি সুষমগতিতে ঘূর্ণায়মান তারের উপরে একটি পুঁতি ভ্রাম্যমাণ। দেখাও যে পুঁতিটি কেন্দ্রাতিগ ত্বরণের জন্যে বহির্মুখী গতিশীল।

৩। নিম্নলিখিত বিভবশক্তির অধীনে ভ্রাম্যমাণ একটি বস্তুর পর্যায়কাল নির্ণয় কর:

(ক) $U = A\,|x|^n$

(খ) $U = -U_0 / \cosh^2 \alpha x \qquad -U_0 < E < 0$

(গ) $U = U_0 \tan^2 \alpha x$

৪। দেখাও যে বিভবশক্তি

$$U = -\frac{\alpha}{r^2} \quad \alpha > 0$$

হলে যখন শক্তি $E > 0$ এবং $l^2/2m > \alpha$, তখন

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{l^2-2m\alpha}}\cos\left(\theta\sqrt{1-2m\alpha/l^2}\right)$$

যদি $E < 0$ এবং $\alpha > l^2/2m$ হলে সমীকরণের রূপ কি হবে?

৫। অভিকর্ষের অধীনে 1 ব্যাসার্ধের বর্তুলের পৃষ্ঠদেশে একটি বস্তুকণা ঘূর্ণায়মান। দেখাও যে বৃত্তাকার গতিপথের স্পন্দনসংখ্যা হল

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}\frac{1+3\cos^2\theta_0}{|\cos\theta_0|}}$$

যেখানে θ_0 হল বিভবশক্তি সর্বনিম্ন হয় যে কোণে তার মান।

৬। একটি বস্তুকণা কেন্দ্রীয় বলের অধীনে গতিশীল যার বিভবশক্তি হল,

$$V = -k\,\frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

কক্ষপথের প্রকৃতি আলোচনা কর।

৭। দেখাও যে কোন বস্তুকণার

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h}{r^2}$$

এই বিভবশক্তিতে গতি শুধু কেপলার বিভবের অধীনে গতির মতোই হবে যদি বলকেন্দ্রের চারদিকে ঘূর্ণনশীল স্থানাঙ্কের মাধ্যমে সমীকরণ প্রকাশ করা হয়।

সামগ্রিক শক্তি ঋণাত্মক হলে দেখাও যে কেপলারের বিভবশক্তির তুলনায় অতিরিক্ত শক্তির অংশটি অতি ক্ষুদ্র হলে, উপবৃত্তাকার কক্ষপথের কৌণিক ঘূর্ণনবেগ হল

$$\dot{\Omega} = \frac{2\pi mh}{l^2 r}$$

বুধ গ্রহের অনুসূর প্রতি শতাব্দীতে প্রায় 8০´´ সরে যায়। দেখাও যে এই অয়নগতি (precession) ব্যাখ্যা করা যায় যদি $\eta = h/ka$ রাশি অত্যন্ত ক্ষুদ্র (7×10^{-8}) হয়। বুধ গ্রহের উৎকেন্দ্রিকতা 0.২০৬ এবং তার পর্যায়কাল 0.২৪ বৎসর।

৮। দেখাও যে দ্বৈত দোলকের কৌণিক স্পন্দনসংখ্যা হল,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2m_1 l_1 l_2}} \sqrt{g(m_1+m_2)(l_1+l_2) \pm g\omega_0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{(m_1+m_2)[m_2(l_1+l_2)^2 + m_1(l_2-l_1)^2]}$$

দেখাও যে যখন $m_1 = m_2 = m$ এবং $l_1 = l_2 = l$,

$$\omega_1 = 1.85\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \omega_2 = 0.77\sqrt{\frac{g}{l}}$$

এবং সেক্ষেত্রে সাধারণ অক্ষাংশ হল,

$$q_{1,2} = \pm\tfrac{1}{2}[\sqrt{4\mp2\sqrt{2}}\ \theta_1 \mp \sqrt{2\mp\sqrt{2}}\ \theta_2]\sqrt{ml^2}$$

৯। অভিকর্ষের অধীনে একটি m ভরের বস্তুকণা একটি মসৃণ সমান্তরাল চোঙের পৃষ্ঠতলে ভ্রাম্যমাণ। বস্তুকণার লাগ্রাঞ্জীয় সমীকরণ নির্ধারণ কর। যদি চোঙের ঠিক উপর থেকে যাত্রা শুরু করে বস্তুকণাটি একটি উল্লম্ব তলে গড়িয়ে পড়ে, তাহলে প্রতিক্রিয়া বল নির্ণয় কর। চোঙের ঠিক কোন বিন্দুতে বস্তুকণাটি বাইরে পড়ে যায়?

১০। অভিকর্ষের অধীনে একটি গোলকের পৃষ্ঠতলে একটি বস্তুকণা ভ্রাম্যমাণ। তার গতিসমীকরণ নির্ধারণ কর এবং দেখাও যে যখন বস্তুকণাটি বাইরে পড়ে

যায় তখন

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

১১। একটি বস্তুকণার বৃত্তাকার কক্ষপথের যে কোন বিন্দুর দিকে বল অভিমুখী হলে বলের আইন নির্ধারণ কর।

১২। একটি বস্তুকণা কেন্দ্রীয় বলের অধীনে ঘূর্ণায়মান এবং তার কক্ষপথ হল শৃঙ্খলাকৃতির (spiral),

$$r = C\theta^2$$

বলের আইন নির্ধারণ কর। সময়ের সঙ্গে θ কিভাবে পরিবর্তিত হয় নির্ণয় কর।

১৩। সূর্যের r_0 দূরত্বে যখন একটি ধূমকেতুর অবস্থান তখন তার দ্রুতি v_0 এবং সূর্যের সঙ্গে সংযোগকারী রেখার সঙ্গে তার গতির দিক φ কোণ উৎপন্ন করে। ধূমকেতুর কক্ষপথের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

১৪। একটি মসৃণ অধিবৃত্তক (paraboloid) যার সমীকরণ হল

$$cz = x^2 + y^2$$

তার ভিতরে একটি বস্তুকণা রাখা হল। সমান্তরাল xy তল থেকে তার উচ্চতা H। বস্তুকণাটি যদি স্থির অবস্থা থেকে যাত্রা শুরু করে তবে, (ক) তা শীর্ষবিন্দুতে কি গতিতে পৌঁছায়, (খ) তার সময় এবং তার ক্ষুদ্র স্পন্দনের পর্যায়কাল নির্ধারণ কর।

১৫। প্রমাণ কর যে ব্যস্তবর্গ বলের অধীনে উপবৃত্তাকার কক্ষপথে ঘূর্ণনশীল বস্তুকণার দ্রুতি হল

$$v^2 = \frac{K}{m}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

যেখানে a হল অর্ধ-পরাক্ষ।

১৬। পৃথিবীপৃষ্ঠ থেকে একটি বস্তু v_0 প্রাথমিক গতিবেগে উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। বায়ুর প্রতিবন্ধকতা বাদ দিয়ে, পৃষ্ঠতলের H উচ্চতায় তার গতিবেগ নির্ধারণ কর। সর্বনিম্ন কোন নিক্ষেপগতির জন্য বস্তুটি আর কখনও ফিরে আসে না?

১৭। একটি আকর্ষণী $\frac{1}{r}$ বিভবশক্তির অধীনে এবং একই কৌণিক ভরবেগ-বিশিষ্ট গতিতে বৃত্তাকার এবং অধিবৃত্তাকার কক্ষপথের জন্য দেখাও যে অধিবৃত্তের

অনুসূর দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের অর্ধেক। দেখাও যে একই কেন্দ্রীয় বলের অধীনে অধিবৃত্তাকার কক্ষপথের যে কোন বিন্দুতে গতিবেগ বৃত্তাকার কক্ষপথের একই বিন্দুতে গতিবেগের $\sqrt{2}$ গুণ।

১৮। দেখাও যে অভিকর্ষ বলের অধীনে উপবৃত্তাকার গতির রৈখিক গতিবেগ হল

$$\dot{r} = \frac{\omega a}{r}\sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}$$

উৎকেন্দ্রিক বৈষম্য ψ প্রবর্তন করে কেপলারের সমীকরণ নির্ধারণ কর।

১৯। যদি উৎকেন্দ্রিকতা e খুব ছোট হয় তাহলে উৎকেন্দ্রিক বৈষম্য ψ এর কেপলারের সমীকরণ

$$M = \omega t = \psi - e \sin \psi$$

একটি ক্রমাগত আসন্নমানের পদ্ধতি দিয়ে সমাধান করা যায়। যদি n আসন্নমানে ψ এর মান ψ_n হয় তবে $\psi_n = \omega t + e \sin \psi_{n-1}$। এই পদ্ধতি প্রয়োগ করে e এর বিভিন্ন ঘাতের একটি রাশি হিসেবে ψ কে প্রকাশ কর।

২০। একটি m ভরের এবং প্রাথমিক গতিবেগ v_0 সম্পন্ন আলফা কণার Ze আধানবিশিষ্ট কেন্দ্রীনের কাছে যাওয়ার সর্বনিম্ন দূরত্ব নির্ধারণ কর।

২১। প্রমাণ কর যে বিকর্ষণী কেন্দ্রীয় বল

$$f = \frac{k}{r^3}$$

এর অধীনে বিচ্ছুরণের প্রস্থচ্ছেদ হল

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k\pi^2 (\pi - \theta)}{2E\theta^2 (2\pi - \theta)^2 \sin\theta}$$

২২। কেন্দ্রীন পদার্থবিজ্ঞানে যে বিভবশক্তি সাধারণত ব্যবহার করা হয় তাকে বলে আয়তাকার কূপ,

$$V = 0 \qquad r > a$$

$$= -V_0 \qquad r \leq a$$

দেখাও যে বিক্ষেপণ প্রস্থচ্ছেদ হল

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{n^2 a^2}{4\cos\frac{\theta}{2}} \frac{\left(n\cos\frac{\theta}{2} - 1\right)\left(n - \cos\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1 + n^2 - 2n\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

যেখানে $n = \sqrt{(E+V_0)/E}$। সামগ্রিক প্রস্থচ্ছেদ কত?

২৩। একটি বিকর্ষণী বিভবশক্তি r এর সাপেক্ষে নিরবচ্ছিন্নভাবে কমে এবং বিভবশক্তি $V(r_m)$ এর তুলনায় সামগ্রিক শক্তি বেশি হলে বিক্ষেপণ-কোণ ক্ষুদ্র হয়। এই পরিস্থিতিতে দেখাও যে বিচ্যুতির কোণ হল,

$$\theta = \frac{1}{E}\int_0^1 \frac{V(u_m) - V(u)}{(1-y^2)^{3/2}}\,dy$$

যেখানে $y = u/u_m$।

দেখাও যে যদি $V(u)$ অপেক্ষক Cu^n হয় তাহলে উচ্চশক্তির প্রান্তিকমানে প্রস্থচ্ছেদ $\theta^{-2(1+1/n)}$ এর সমানুপাতিক।

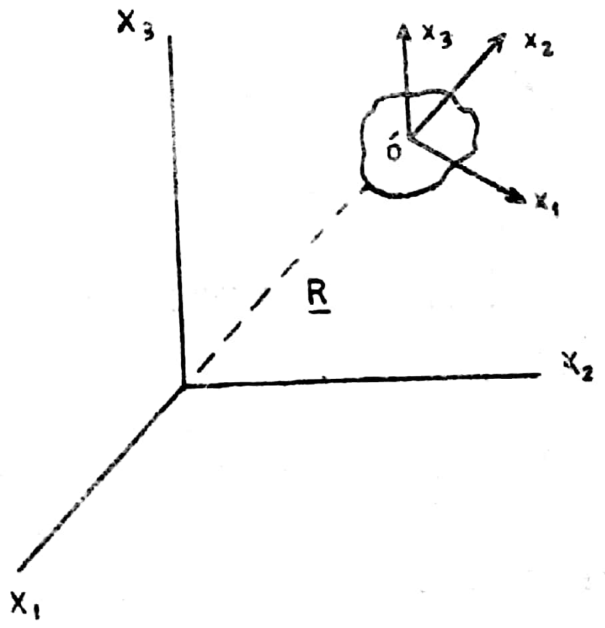
পঞ্চম অধ্যায়

দৃঢ়বস্তুর গতি বর্ণনা

একটি দৃঢ়বস্তু হল অসংখ্য বস্তুকণার সমষ্টি। বস্তুকণাগুলি এই হলোনমী শর্তের অধীন যে গতির সময়ে প্রতি জোড়া বস্তুকণার মধ্যে দূরত্ব অপরিবর্তী থাকে। প্রকৃতিতে অবশ্য এ ধরনের আদর্শ বস্তু পাওয়া যায় না, কেননা পরমাণুগুলি সব সময়েই আপেক্ষিক গতিসম্পন্ন, তবে দুটি কণিকার মধ্যে এই গতি সবসময় কোন সুস্থিতি বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘটে, ফলে গড়ে দূরত্ব সবসময় এক থাকে। কিন্তু দৃঢ়বস্তুর বৃহৎ মানের গতি বর্ণনার জন্য তার অণু, পরমাণু এবং আয়নগুলির ক্ষুদ্র মানের গতি বাদ দেয়া যায়।

৫.১ দৃঢ়বস্তুর স্বতন্ত্র স্থানাঙ্ক

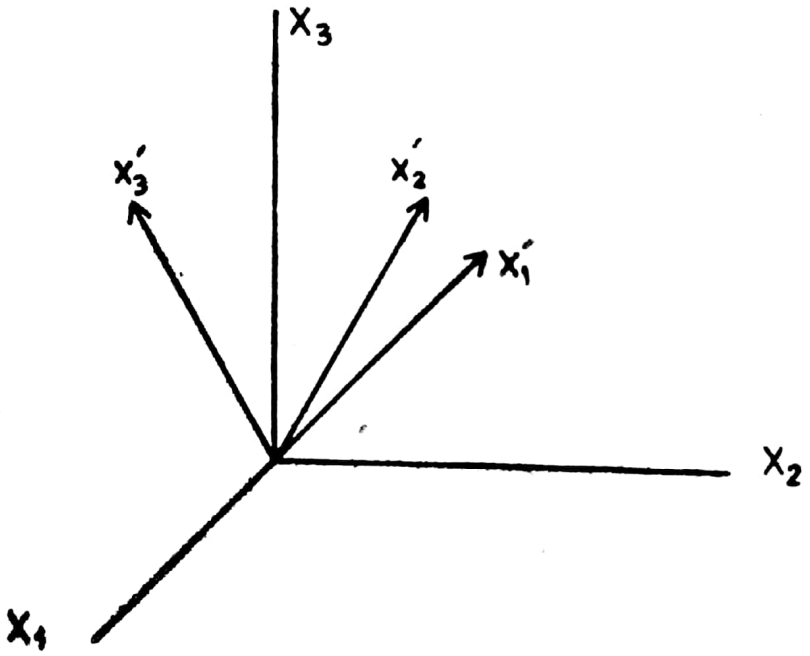
দৃঢ়বস্তুর গতি বর্ণনা করার জন্য আমরা দুটি স্থানাঙ্ক ব্যবহার করি : X_1 X_2, X_3 অক্ষরেখার একটি 'স্থির' স্থানাঙ্ক পদ্ধতি এবং বস্তুর সঙ্গে দৃঢ়ভাবে সংযুক্ত x_1, y_1, z_1 অক্ষরেখার একটি 'চলমান' স্থানাঙ্ক পদ্ধতি। চলমান স্থানাঙ্কের মূলবিন্দু বস্তুর ভরকেন্দ্রে নেয়া যায়।



চিত্র : ৫.১

স্থির স্থানাঙ্কের পরিপ্রেক্ষিতে বস্তুর অবস্থান সম্পূর্ণভাবে জানা যায় যদি চলমান স্থানাঙ্কের অবস্থান জানা থাকে। ধরা যাক স্থির স্থানাঙ্কের মূলবিন্দু O-এর সাপেক্ষে চলমান স্থানাঙ্কের মূলবিন্দু O′-এর অবস্থান সদিক রাশি হল $\underline{R}$ (চিত্র ৫.১)। স্থির স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে চলমান স্থানাঙ্কের অবস্থান তিনটি স্বতন্ত্র কোণ দিয়ে প্রকাশ করা যায়। এই তিনটি কোণ এবং $\underline{R}$ সদিক রাশির তিনটি উপাংশ মিলে মোট ছয়টি স্থানাঙ্ক হয়। সুতরাং একটি দৃঢ়বস্তু হল ছয়টি স্বতন্ত্র-মাত্রার একটি যান্ত্রিক বস্তুনিচয়।

একটি কার্টেশীয় স্থানাঙ্ক x_1, x_2, x_3-এর সাপেক্ষে অন্য একটি কার্টেশীয় স্থানাঙ্ক x_1', x_2', x_3'-এর অবস্থান অনেকভাবে প্রকাশ করা যায়। দুটি স্থানাঙ্কের মূলবিন্দু একটিই (চিত্র ৫.২)। একটি পরিচিত পদ্ধতি হল স্থির স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে চলমান স্থানাঙ্কের দিক-কোসাইনগুলি নেয়া।



চিত্র : ৫.২

সুতরাং x_1' অক্ষরেখা X_1, X_2, X_3 অক্ষরেখার সাপেক্ষে তিনটি দিক-কোসাইন α_i দিয়ে নির্দেশ করা যায়,

$$\alpha_1 = \cos\left(\hat{\underline{i}}', \hat{\underline{i}}\right) = \hat{\underline{i}}' \cdot \hat{\underline{i}}$$

$$\alpha_2 = \hat{\underline{i}}' \cdot \hat{\underline{j}}$$

$$\alpha_3 = \hat{\underline{i}}' \cdot \hat{\underline{k}}$$

যেখানে $\hat{\underline{i}}$, $\hat{\underline{j}}$, $\hat{\underline{k}}$ হল X_1, X_2, X_3 অক্ষরেখার দিকে তিনটি একক সদিক রাশি এবং x_1', x_2', x_3' অক্ষরেখার দিকে তিনটি একক সদিক রাশি হল $\hat{\underline{i}}'$, $\hat{\underline{j}}'$, $\hat{\underline{k}}'$। সুতরাং লেখা যায়,

$$\hat{\underline{i}}' = \alpha_1 \hat{\underline{i}} + \alpha_2 \hat{\underline{j}} + \alpha_3 \hat{\underline{k}}$$

একইভাবে,

$$\hat{\underline{j}}' = \beta_1 \hat{\underline{i}} + \beta_2 \hat{\underline{j}} + \beta_3 \hat{\underline{k}}$$

$$\hat{\underline{k}}' = \gamma_1 \hat{\underline{i}} + \gamma_2 \hat{\underline{j}} + \gamma_3 \hat{\underline{k}}$$

যেখানে β_i হল x_2' অক্ষরেখার এবং γ_i হল x_3' অক্ষরেখার দিক-কোসাইন।

সুতরাং $x_1' x_2' x_3'$ স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে যে কোন অবস্থান সদিক রাশির উপাংশ হল,

$$x_1' = \hat{\underline{i}}' \cdot \underline{r} = (\alpha_1 \hat{\underline{i}} + \alpha_2 \hat{\underline{j}} + \alpha_3 \hat{\underline{k}}) \cdot \underline{r} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$$

$$x_2' = \hat{\underline{j}}' \cdot \underline{r} = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3$$

$$x_3' = \hat{\underline{k}}' \cdot \underline{r} = \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 X_3$$

কেননা $\underline{i} \cdot \underline{r} = X_1$ ইত্যাদি। সুতরাং এই তিনটি সমীকরণ আমরা একত্রে এভাবে লিখতে পারি,

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} X_j \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (৫.১)$$

যেখানে $a_{11} = \alpha_1$, $a_{12} = \alpha_2$ ইত্যাদি। যেহেতু রেফ-বিশিষ্ট স্থানাঙ্ক বস্তুর সঙ্গে সংযুক্ত তাই দৃঢ়বস্তু যখন গতিশীল হয় তখন এই নয়টি দিক-কোসাইন a_{ij} সময়ের উপর নির্ভরশীল হয়ে যায়। সুতরাং একই মূলবিন্দুবিশিষ্ট স্থানীয়ভাবে স্থির স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে বস্তুর তাৎক্ষণিক অবস্থান বর্ণনা করার জন্য এই নয়টি রাশির প্রয়োজন। এই নয়টির সবগুলি স্বতন্ত্র নয় কেননা একক সদিক রাশির জন্যে অভিলাম্বিকতার শর্তগুলি ($\underline{i} \cdot \underline{i} = \hat{\underline{i}}' \cdot \hat{\underline{i}}' = 1$, $\underline{i} \cdot \underline{j} = \hat{\underline{i}}' \cdot \hat{\underline{j}}' = 0$ ইত্যাদি) থেকে ছয়টি সম্পর্ক পাওয়া যায়,

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$$

$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3=\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0 \qquad (৫.২)$$

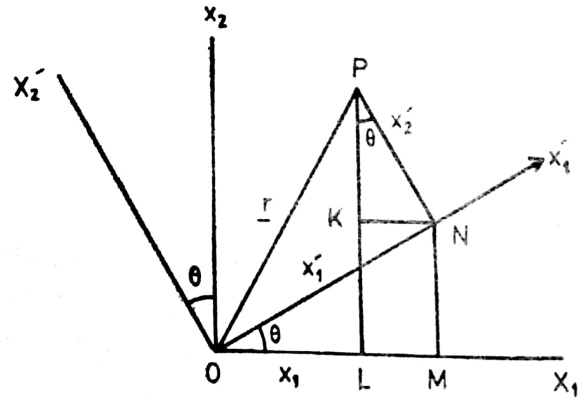
এইসব শর্ত আরোপ করলে স্বতন্ত্র দিক-কোসাইনের সংখ্যা তিনে দাঁড়ায় এবং তাই দৃঢ়বস্তুর গতি বর্ণনার জন্যে দিক-কোসাইন উপযোগী নয়, কেননা আমাদের ছয়টি স্বতন্ত্র রাশির প্রয়োজন। দিক-কোসাইনের তিনটি স্বতন্ত্র অপেক্ষক এ উদ্দেশ্যে ব্যবহার করা যায়। অয়লার কোণ দিয়ে এ ধরনের স্বতন্ত্র পরিবর্তী রাশির একটি গুচ্ছ পাওয়া যায়। কিন্তু অয়লার কোণ ব্যাখ্যা করার আগে (৫.১) সমীকরণের অভিলাম্বিক রূপান্তরের কিছু বৈশিষ্ট্য আলোচনা করা যেতে পারে।

৫.২ অভিলাম্বিক রূপান্তর

রেফযুক্ত এবং রেফ-হীন স্থানাঙ্কদ্বয়ের সংযোগকারী সমীকরণ হল,

$$x_i' = \sum_j a_{ij}\, x_j \qquad (৫.৩)$$

উদাহরণস্বরূপ, দ্বিমাত্রিক জগতে আমরা স্থানাঙ্কের ঘূর্ণন আলোচনা করতে পারি (চিত্র ৫.৩)। ধরা যাক P বিন্দুর অক্ষাংশ (x_1, x_2) এবং (x_2', x_2')। যেহেতু $OM = OL + LM$ এবং $NM = PL - PK$,



চিত্র : ৫.৩

$$x_1' \cos\theta = x_1 + x_2' \sin\theta \qquad x_1 = x_1' \cos\theta - x_2' \sin\theta$$

$$x_1' \sin\theta = x_2 - x_2' \cos\theta \qquad x_2 = x_1' \sin\theta + x_2' \cos\theta$$

সুতরাং সমাধান করে,

$$x_1' = x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta$$
$$x_2' = -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \qquad (৫.৪)$$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে

$$a_{11} = \cos\theta \quad a_{12} = \sin\theta \quad a_{21} = -\sin\theta \quad a_{22} = \cos\theta$$

স্পষ্টতই দিক-কোসাইনগুলি হল $\alpha_1 = \cos\theta$, $\alpha_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$, $\beta_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$ এবং $\beta_2 = \cos\theta$। সুতরাং $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$ এবং $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0$। (৫.৪) সমীকরণকে মেট্রিক্স আকারে লেখা যায়,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

এখন যদি উপাংশের স্তম্ভ-মেট্রিক্স সদিক রাশি

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

প্রবর্তন করা হয় তাহলে এই সমীকরণ লেখা যায়,

$$x' = A \cdot x$$

যেখানে ডানদিকে মেট্রিক্স গুণন ব্যবহার করা হয়েছে এবং A মেট্রিক্স হল,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

লক্ষ্য করা দরকার যে এই মেট্রিক্সের 'নির্ণায়ক'

$$\det A = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1$$

এখন আমরা আমাদের সাধারণ (৫.৩) সমীকরণে ফিরে যাই। লেখার সুবিধার জন্য আমরা এখন এই রীতি অনুসরণ করব যে সমীকরণে কোন সূচকের পুনরাবৃত্তি হলে সেই সূচকের উপর যোগ বুঝতে হবে। এই রীতি ব্যবহার করলে

(৫.৩) সমীকরণে সমষ্টিকরণ প্রতীক Σ আর দেওয়ার প্রয়োজন হয় না।

সুতরাং

$$x_i' = a_{ij} x_j \qquad i, j = 1, 2, 3 \qquad (৫.৫)$$

কেননা এখানে ডানদিকে j সূচকের উপরে যোগ চিহ্ন আছে বুঝে নিতে হবে (অর্থাৎ $x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3$ ইত্যাদি)।

কোন সদিক রাশির দৈর্ঘ্য অর্থাৎ মান স্থানাঙ্কের উপর নির্ভর করে না। সুতরাং যেহেতু একটি সদিক রাশির বর্গ হল তার কার্টেশীয় উপাংশগুলির বর্গের যোগফল $\left(\underline{A}^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \right)$, তাই রেফহীন এবং রেফযুক্ত স্থানাঙ্কে অবস্থান সদিক রাশি $\underline{r}$ এর বর্গ করে লেখা যায়,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$$

অথবা $$x_i x_i = x_i' x_i' \qquad (৫.৬)$$

কেননা রীতি অনুসারে $x_i x_i = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$।

(৫.৫) সমীকরণ (৫.৬) সমীকরণে বসিয়ে,

$$x_i x_i = a_{ij} x_j \, a_{ik} x_k = a_{ij} a_{ik} \, x_i x_k$$

এই সমীকরণ সঠিক হতে পারে যদি

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \qquad (৫.৭)$$

যেখানে δ_{jk} হল ক্রোনেকার ডেল্টা,

$$\delta_{jk} = 1 \qquad \text{যখন } j = k$$
$$= 0 \qquad \text{যখন } j \neq k$$

উদাহরণস্বরূপ দ্বিমাত্রিক জগতে i, j, k এর মান 1 এবং 2 এবং সেক্ষেত্রে (৫.৭) সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \quad a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} = 0$$

যেহেতু $a_{11} = \cos\theta = a_{22}$, $a_{12} = -a_{21} = \sin\theta$ তাই এই শর্তগুলি অবশ্যই সার্থক হয়।

(৫.৫) সমীকরণের 'রৈখিক রূপান্তরকে' অভিলাম্বিক রূপান্তর বলা হয়। ত্রিমাত্রিক জগতে স্তম্ভ-মেট্রিক্স প্রবর্তন করে,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

আমরা লিখতে পারি,

$$x' = Ax \qquad (৫.৮)$$

যেখানে A মেট্রিক্স হল

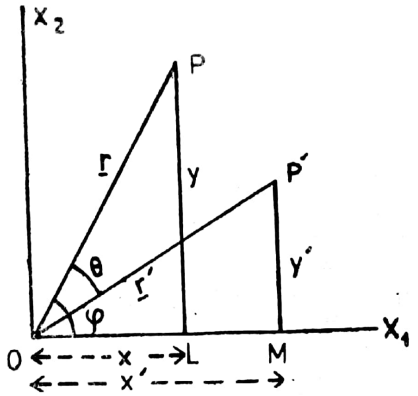
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

এই A মেট্রিক্সের অংশগুলি a_{ij} (৫.৭) সমীকরণ সার্থক করে।

ত্রিমাত্রিক জগতে x_3-অক্ষরেখার চারপাশে θ কোণে স্থানাঙ্ককে ঘড়ির বিপরীত দিকে ঘুরালে আমরা পাই (চিত্র ৫.৩),

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

কেননা এক্ষেত্রে x_3 এবং x'_3 অক্ষদ্বয় একই। স্থানাঙ্কের উপর রূপান্তর প্রয়োগ করলে অবস্থান সদিক রাশি $\underline{r}$ একই জায়গায় থাকে। এই রূপান্তর পদ্ধতিকে নিষ্ক্রিয় দৃষ্টিভঙ্গী বলে (চিত্র ৫.৩)। বিকল্প হিসেবে আমরা স্থানাঙ্ক না ঘুরিয়ে, সদিক রাশিকে একই কোণ-পরিমাণে কিন্তু উল্টা দিকে (ঘড়ির ঘূর্ণন দিকে) ঘুরাতে পারি।



চিত্র : ৫.৪

এক্ষেত্রে

$$x' = OP\cos(\varphi - \theta) = OP\cos(\varphi - \theta)$$
$$= x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = OP'\sin(\varphi - \theta) = OP\sin(\varphi - \theta)$$
$$= y\cos\theta - x\sin\theta$$

সুতরাং রূপান্তর সমীকরণ (৫.৪) অপরিবর্তিত থাকে। এ ধরনের রূপান্তর যেখানে সদিক রাশিটিকেই ঘুরানো হয় তাকে সক্রিয় দৃষ্টিভঙ্গী বলে।

৫.৩ রূপান্তর মেট্রিক্সের গুণন

ধরা যাক একটি দৃঢ়বস্তুর উপর দুটি রূপান্তর পর পর আরোপ করা হয়,

$$x' = Bx \qquad x'' = Ax' \tag{৫.৯}$$

উপাংশ-আকারে লেখা যায়,

$$x'_k = b_{kj}\,x_j \qquad x''_i = a_{ik}\,x'_k$$

সমীকরণ দুটি একত্র করে,

$$x''_i = a_{ik}\,b_{kj}\,x_j \tag{৫.১০}$$

যেখানে সমষ্টিকরণ প্রতীক দুটি উহ্য রাখা হয়েছে। অন্যদিকে সরাসরি লেখা যায়,

$$x'' = Cx$$

অর্থাৎ

$$x''_i = C_{ij}\,x_j \tag{৫.১১}$$

সুতরাং (৫.১০) এবং (৫.১১) সমীকরণ থেকে লেখা যায়,

$$C_{ij} = a_{ik}\,b_{kj} \tag{৫.১২}$$

অর্থাৎ দুটি অভিলাম্বিক রূপান্তর পর পর আরোপ করলে একটি তৃতীয় অভিলাম্বিক রূপান্তর পাওয়া যায়,

$$C = AB \tag{৫.১৩}$$

যেখানে ডানদিকে মেট্রিক্স গুণনের নিয়ম ব্যবহার করা হয়েছে,

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{kj} = a_{ik}\,b_{kj}$$

উদাহরণস্বরূপ,

$$C_{11} = a_{1k}\,b_{k1} = a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{21} + \ldots + a_{1m}\,b_{m1}$$

এখানে A মেট্রিক্স যদি $n \times m$ মাত্রার হয় অর্থাৎ তার যদি n সারি এবং m স্তম্ভ থাকে তবে B মেট্রিক্স $m \times n$ মাত্রার হতে হবে। এ ধরনের দুটি আয়তাকার মেট্রিক্সকে সুসংগত (compatible) বলে।

লক্ষ্য করা দরকার যে মেট্রিক্স গুণন বিনিময়ী নয়,

$$BA \neq AB$$

কিন্তু অনুষঙ্গী (associative),

$$(AB)\,C = A\,(BC)$$

দুটি মেট্রিক্স যোগ করার অর্থ প্রতিষঙ্গী মেট্রিক্স-উপাংশ যোগ করা,

$$C = A + B$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

মেট্রিক্স A দিয়ে যে রূপান্তর নির্দেশ করা হয় তার বিপরীত রূপান্তর A^{-1} দিয়ে পাওয়া যায় এবং তার উপাংশগুলিকে a'_{ij} বলা যায়। সুতরাং $x' \to x$ রূপান্তরের জন্যে লেখা যায়,

$$x_i = a'_{ij}\, x'_j$$

কিন্তু x থেকে পুনরায় x'-এ ফিরে যাওয়া যায়, $x'_k = a_{ki}\, x_i$। সুতরাং

$$x'_k = a_{ki}\, x_i = a_{kl}\, a'_{ij}\, x'_j$$

এই সমীকরণ সঠিক যখন

$$a_{kl}\, a'_{ij} = \delta_{kj}$$

অর্থাৎ A এবং A^{-1} মেট্রিক্সদ্বয় নিচের মেট্রিক্স শর্ত পালন করে,

$$A\,A^{-1} = 1 \qquad (৫.১৪)$$

কেননা 1 একটি একক মেট্রিক্স যার কর্ণের উপাদানগুলি শুধু 1।
উদাহরণস্বরূপ,

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

একটি মেট্রিক্স A-কে সারি এবং স্তম্ভ বদলাবদলি করে যে মেট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে পক্ষান্তরিত (transposed) মেট্রিক্স বলে এবং A^T প্রতীকে লেখা হয়। সুতরাং

A মেট্রিক্সের উপাদান a_{ij} হলে, A^T মেট্রিক্সের উপাদান হবে a_{ji}

$$A = (a_{ij}) \qquad A^T = (a_{ji})$$

একটি মেট্রিক্স A যদি নিচের সমীকরণ সার্থক করে,

$$A^T A = 1 \tag{৫.১৫}$$

তবে তাকে অভিলাম্বিক মেট্রিক্স বলা হয়। সুতরাং (৫.১৪) সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে দেখা যায় যে অভিলাম্বিক মেট্রিক্সের জন্য,

$$A^T = A^{-1} \tag{৫.১৬}$$

মেট্রিক্স গুণনের নিয়ম অনুসারে (৫.১৫) সমীকরণ থেকে লেখা যায়,

$$(A^T)_{ji}\ (A)_{ik} = \delta_{jk}$$

সুতরাং

$$a_{ij}\, a_{ik} = \delta_{jk} \tag{৫.১৭}$$

এই সমীকরণ আগেই আমরা পেয়েছি (৫.৭)। সুতরাং ত্রিমাত্রিক জগতে স্থানাঙ্ক রূপান্তরের মেট্রিক্স আসলে অভিলাম্বিক মেট্রিক্স।

একটি আয়তাকার মেট্রিক্সের n সারি এবং m স্তম্ভ থাকলে তাকে $n \times m$ মাত্রার মেট্রিক্স বলে। একটি $n \times 1$ মাত্রার মেট্রিক্সকে 'স্তম্ভ-মেট্রিক্স' এবং $1 \times m$ মাত্রার মেট্রিক্সকে 'সারি মেট্রিক্স' বলে।

একটি বর্গ মেট্রিক্স তার পক্ষান্তরিত মেট্রিক্সের সমান হলে

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad A = A^T$$

তাকে প্রতিসম মেট্রিক্স বলে। যদি পক্ষান্তরিত মেট্রিক্স মূল মেট্রিক্সের ঋণাত্মক হলে,

$$a_{ij} = -a_{ji} \qquad A = -A^T$$

তাকে বি-প্রতিসম মেট্রিক্স বলে।

কোন মেট্রিক্সের উপাংশগুলিকে পক্ষান্তরিত এবং জটিলযুগ্মা (complex conjugation) করে যে নতুন মেট্রিক্স সৃষ্টি হয় তাকে 'সংলগ্ন' (adjoint) মেট্রিক্স বলে এবং $A^\dagger$ প্রতীক দ্বারা লেখা হয়,

$$A^\dagger = (A^T)^*$$

অর্থাৎ $A^\dagger$ মেট্রিক্সের উপাংশগুলি হল a_{ij}^*।

কোন মেট্রিক্স A তার সংলগ্ন মেট্রিক্সের সমান হলে,

$$A = A^{\dagger} \qquad a_{ij} = a_{ji}^{*}$$

তাকে হার্মিশিয়ান বা 'স্বয়ং-সংলগ্ন' মেট্রিক্স বলে। আবার কোন মেট্রিক্স যদি নিচের সমীকরণ সার্থক করে,

$$AA^{\dagger} = A^{\dagger}A = 1$$

তবে তাকে ঐকিক (unitary) মেট্রিক্স বলে। স্পষ্টতই ঐকিক মেট্রিক্সের জন্যে,

$$A^{\dagger} = A^{-1}$$

এখন ধরা যাক একটি মেট্রিক্স A-এর মাধ্যমে একটি সদিক রাশির স্তম্ভ মেট্রিক্স আর একটি স্তম্ভ মেট্রিক্স y-তে রূপান্তরিত হয়,

$$y = Ax \tag{৫.১৮}$$

অন্যদিকে ধরা যাক যে একটি স্থানাঙ্ক রূপান্তরের জন্যে y ও x সদিক রাশি যথাক্রমে $\acute{y}$ ও $\acute{x}$ সদিক রাশিতে পরিবর্তিত হয় B মেট্রিক্সের মাধ্যমে,

$$\acute{y} = Bx \qquad \acute{x} = Bx$$

সুতরাং

$$\acute{y} = By = BAx = (BAB^{-1})\, Bx$$
$$= (BAB^{-1})\, \acute{x}$$

যার অর্থ হল যে BAB^{-1} মেট্রিক্স $\acute{x}$-এর কাজ করে $\acute{y}$ সৃষ্টি করে এবং তাই (৫.১৮) সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে,

$$A' = BAB^{-1} \tag{৫.১৯}$$

কেননা $\acute{y} = A'\acute{x}$ । (৫.১৯) সমীকরণকে A মেট্রিক্সের উপরে B মেট্রিক্সের মাধ্যমে সমরূপতার (similarity) রূপান্তর বলে।

যে কোন $n \times m$ মাত্রার A মেট্রিক্সের নির্ণায়ক হল

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nm} \end{vmatrix} \tag{৫.২০}$$

সহজেই প্রমাণ করা যায় যে

$$\det(AB) = (\det A)(\det A)$$

যেহেতু অভিলাম্বিক মেট্রিক্সের শর্ত হল $AA^T = 1$ তাই

$$(\det A)(\det A^T) = 1$$

কিন্তু কোন মেট্রিক্স পক্ষান্তরিত করলে তার 'নির্ণায়কের' মান পরিবর্তিত হয় না। সুতরাং

$$(\det A)^2 = 1 \qquad \det A = \pm 1 \qquad (৫.২১)$$

সুতরাং অভিলাম্বিক মেট্রিক্সের জন্য নির্ণায়কের মান $+1$ অথবা -1। উদাহরণ-স্বরূপ আগেই দেখানো হয়েছে যে দ্বিমাত্রিক জগতে ঘূর্ণন মেট্রিক্সের নির্ণায়কের মান $+1$। অতি ক্ষুদ্র ঘূর্ণনের জন্য ঘূর্ণন মেট্রিক্স হল

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

যার নির্ণায়ক $+1$। যেহেতু সসীম ঘূর্ণনের জন্যে নির্ণায়কের চিহ্ন হঠাৎ পরিবর্তন হতে পারে না তাই ঘূর্ণন মেট্রিক্সের নির্ণায়ক সবসময়েই $+1$ হতে হবে। অন্যদিকে যে সব অভিলাম্বিক রূপান্তরের জন্যে নির্ণায়কের মান -1 তারা আসলে স্থানাঙ্কের প্রতিফলন নির্দেশ করে। যেমন $x_1' = -x_1$, $x_2' = -x_2$, $x_3' = -x_3$ এই রূপান্তরের মেট্রিক্স হল

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

এবং এটা দিয়ে ডান-হাতি স্থানাঙ্ক থেকে বাঁ-হাতি স্থানাঙ্কে যাওয়া যায়। এ ধরনের স্থানাঙ্কের ব্যুৎক্রম (inversion) দৃঢ়বস্তুর কোন ভৌত সরণ বুঝায় না। সুতরাং দৃঢ়বস্তুর গতি বর্ণনার জন্যে আমরা শুধু $+1$ নির্ণায়কের মেট্রিক্স নেব।

৫.৪ অয়লার কোণ

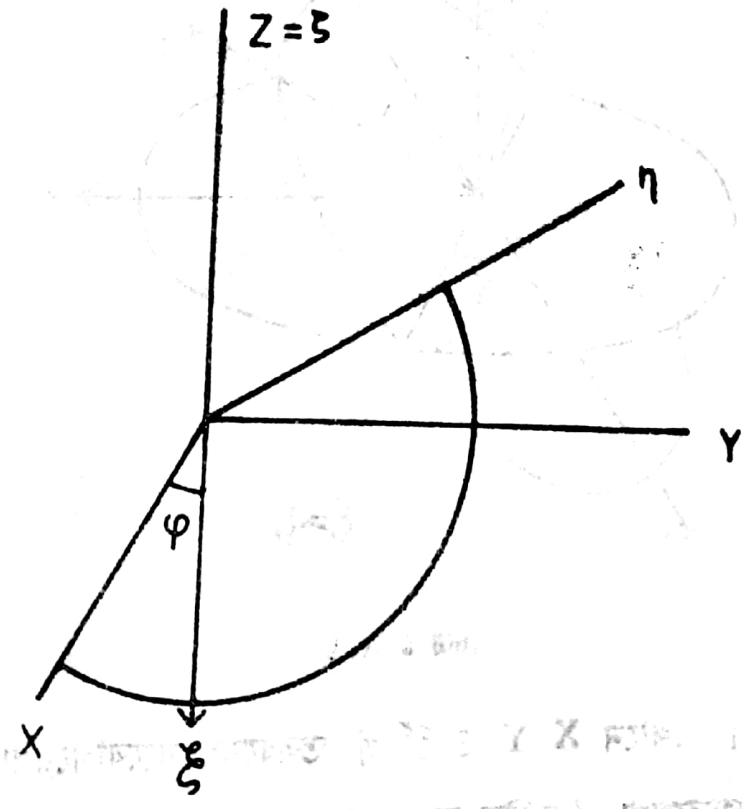
একটি দৃঢ়বস্তুর ছয়টি স্বাধীনতার-মাত্রা আছে। এটা দুভাবে দেখা যায়। যেহেতু দৃঢ়বস্তু ঘুরতে পারে এবং সামগ্রিকভাবে সরণবিশিষ্ট হতে পারে তাই তার ৩টি ঘূর্ণনের এবং তিনটি সরণের স্বাধীনতার-মাত্রা থাকে। অন্যভাবে বলা যায়, দৃঢ়বস্তুর মধ্যে আমরা তিনটি বস্তুকণা নিতে পারি যারা একই সরলরেখায় অবস্থিত নয়। প্রতিটি বস্তুকণার অবস্থান তিনটি কার্টেশীয় স্থানাঙ্ক দিয়ে নির্দেশ করা হয় কিন্তু $r_{12} =$ ধ্রুব, $r_{23} =$ ধ্রুব এবং $r_{13} =$ ধ্রুব এ ধরনের তিনটি

শর্ত বজায় রাখতে হয় কেননা r_{ij} হল i এবং j বস্তুকণার মধ্যে দূরত্ব যা সংজ্ঞানুসারে দৃঢ়বস্তুতে অপরিবর্তী। সুতরাং নয়টি স্থানাঙ্ক কমে ছয়টিতে আসে। আর একটি অতিরিক্ত বস্তুকণা নিলে আবার তার জন্যে তিনটি স্থানাঙ্কের প্রয়োজন হয় কিন্তু প্রথম তিনটি বস্তুকণা থেকে তার দূরত্বও অপরবর্তী, তাই নতুন কোন স্বাধীনতার-মাত্রা প্রয়োজন হয় না।

সুতরাং লাগ্রাঞ্জীয় পদ্ধতি ব্যবহার করার জন্য আমাদের দৃঢ়বস্তুর অবস্থান নির্দেশ করতে তিনটি স্বতন্ত্র রাশির প্রয়োজন। তাছাড়া রূপান্তর মেট্রিক্স এমন হতে হবে যাতে তার নির্ণায়ক $+1$ হয়। এ ধরনের সাধারণ স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে পারলেই আমরা লাগ্রাঞ্জীয় অপেক্ষক লিখতে সক্ষম হই। অয়লার কোণ দিয়ে এ ধরনের স্থানাঙ্কগুচ্ছ দেয়া হয়।

অয়লার কোণের সংজ্ঞা দিতে আমরা একটি কার্টেশীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতিকে অন্য আরেকটিতে পরপর তিনটি ঘূর্ণনের মাধ্যমে রূপান্তর করি। পরপর ঘূর্ণনের তিনটি কোণ হল অয়লার কোণ।

প্রথমে আমরা আমাদের প্রাথমিক স্থানাঙ্ক X, Y, Z কে Z-অক্ষের চারদিকে φ কোণে ঘড়িগতির বিপরীত দিকে ঘুরাই। এভাবে নতুন স্থানাঙ্ক ξ, η, ζ সৃষ্টি



চিত্র : ৫.৫

হয়। Z-অক্ষের চারদিকে এই ঘূর্ণনকে D ঘূর্ণন মেট্রিক্স দিয়ে বর্ণনা করা যায়,

$$\underline{\xi} = D\,\underline{x}$$

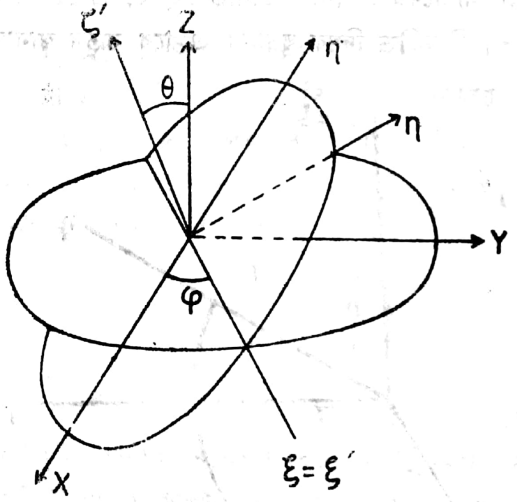
যেখানে $\underline{\xi}$ এবং $\underline{x}$ তিনটি স্তম্ভ-মেট্রিক্স,

$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

এবং D মেট্রিক্স Z-অক্ষের চারদিকে φ কোণে ঘূর্ণনের মেট্রিক্স :

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (৫.২২)$$

দ্বিতীয় পর্যায়ে (ξ, η, ζ) স্থানাঙ্ককে ξ-অক্ষের চারদিকে ঘড়ি-গতির বিপরীত দিকে θ কোণে ঘুরান হয় এবং এভাবে আর একটি নতুন স্থানাঙ্ক (ξ', η', ζ') সৃষ্টি



চিত্র : ৫.৬

হয় (চিত্র ৫.৬)। এখানে X Y ও ξ' η' তলদ্বয়ের সংযোগরেখা হল ξ'-অক্ষ এবং এটাকেই পাতরেখা (লাইন অব নোড) বলে। পূর্বের মতোই $(\xi\eta\zeta)$ স্থানাঙ্ক থেকে $(\xi'\eta'\zeta')$ স্থানাঙ্কে রূপান্তর লেখা যায়,

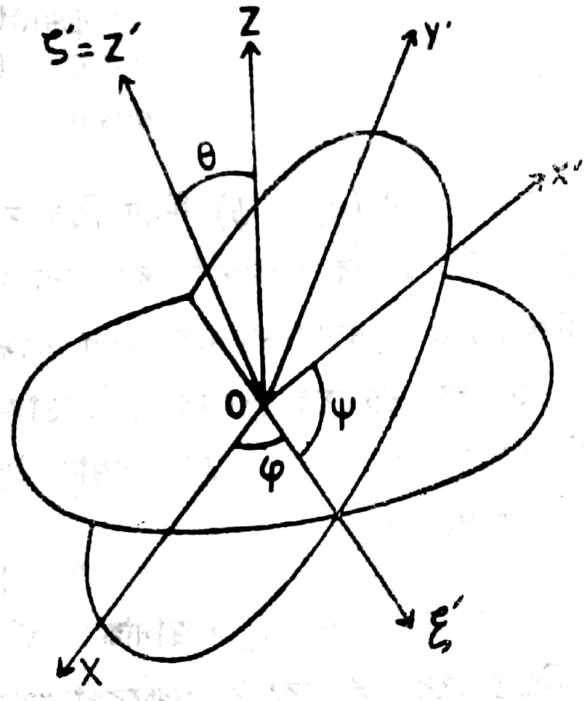
$$\underline{\xi} = C\,\underline{\xi}$$

যেখানে রূপান্তর মেট্রিক্স হল

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (৫.২৩)$$

কেননা এক্ষেত্রে ξ অক্ষরেখার চারপাশে θ কোণে অক্ষরেখাগুলিকে ঘুরান হয়েছে।

চূড়ান্ত পর্যায়ে $(\xi' \eta' \zeta')$ স্থানাঙ্ককে ζ'-অক্ষরেখার চারদিকে ψ কোণে ঘড়ির বিপরীত দিকে ঘুরিয়ে $x' y' z'$ স্থানাংক তৈরি করা হয় (চিত্র ৫.৭)।



চিত্র ঃ ৫.৭

শেষের ঘূর্ণন মেট্রিক্স হল B,

$$x' = B\xi'$$

যেখানে

$$B = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (৫.২৪)$$

সুতরাং XYZ থেকে $x'y'z'$ স্থানাঙ্কে রূপান্তরের সামগ্রিক মেট্রিক্স হল A যেখানে

$$x' = Ax$$

এবং

$$A = BCD$$

পূর্বের ৫.২২, ৫.২৩ এবং ৫.২৪ সমীকরণ ব্যবহার করে,

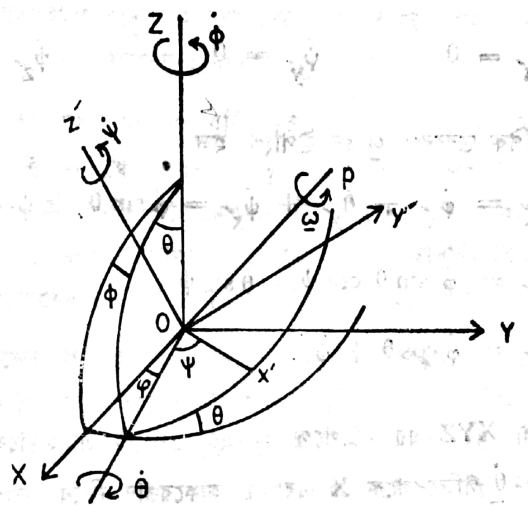
$$A = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \cos\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (৫.২৫)$$

দৃঢ়বস্তুর জন্যে, তিনটি অয়লার কোণ (φ, θ, ψ) দিয়ে স্থির স্থানাঙ্ক X Y Z এর পরিপ্রেক্ষিতে চলমান স্থানাঙ্ক $x'y'z'$ এর অবস্থান নির্দেশ করা যায়। স্থির-স্থানাঙ্ক স্থানে আবদ্ধ (space-fixed) এবং চলমান-স্থানাঙ্ক বস্তুর সঙ্গে সংযুক্ত (body-fixed)। অয়লার কোণ দিয়ে তাই দৃঢ়বস্তুর ঘূর্ণনের স্বাধীনতার-মাত্রা বর্ণনা করা যায়। বস্তুর সরণ গতি থাকলে তার ভরকেন্দ্রের অবস্থান নির্দেশ করার জন্যে আরো তিনটি অক্ষাংশের প্রয়োজন হয়।

সুতরাং দৃঢ়বস্তুর আলোচনায় বস্তুর সঙ্গে সংযুক্ত স্থানাঙ্ক x' y' z' এবং স্থানাবদ্ধ স্থানাঙ্ক XYZ আমাদের নিতে হবে। Z এবং Z' অক্ষরেখাদ্বয়ের মধ্যে কোণ হল θ,, X অক্ষরেখা এবং পাতরেখার মধ্যে কোণ হল φ। পাতরেখা হল XY এবং $x'y'$ তলের মিলনরেখা। সবশেষে ψ হল পাত রেখা এবং x'-অক্ষরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ। এভাবে সংজ্ঞায়িত তিনটি কোণ হল অয়লার কোণ।

৫.৫ কৌণিক বেগের উপাংশ

ধরা যাক একটি দৃঢ়বস্তুর তাৎক্ষণিক কৌণিক গতিবেগ $\underline{\omega}$ (চিত্র ৫.৮)। এই চিত্রে অয়লার কোণ (φ, θ, ψ) এবং এই কোণগুলির কাল-নির্ভর বৃদ্ধিহার দেখানো হয়েছে যেগুলি আসলে তাৎক্ষণিক কৌণিক গতিবেগের উপাংশ,



চিত্র ঃ ৫.৮

$$\omega_\varphi = \dot{\varphi} \qquad \omega_\theta = \dot{\theta} \qquad \omega_\psi = \dot{\psi}$$

কেননা

$\dot{\varphi}$ এর দিক Z-অক্ষরেখার দিকে (স্থির অক্ষ)

$\dot{\theta}$ এর দিক পাত অক্ষের দিকে

$\dot{\psi}$ এর দিক Z´-অক্ষের দিকে (চলমান অক্ষ)

এই গতিবেগগুলির x´, y´, z´ অক্ষের দিকে উপাংশ নিলে আমরা পাই,

$$\dot{\varphi}_{x'} = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi$$

$$\dot{\varphi}_{y'} = \dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi$$

$$\dot{\varphi}_{z'} = \dot{\varphi} \cos\theta$$

কেননা $\dot{\varphi}$ সদিক রাশির x´ y´ তলে অভিক্ষেপ $\dot{\varphi} \sin\theta$ উপাংশটি x´-অক্ষরেখার সঙ্গে $\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$ কোণ সৃষ্টি করে (চিত্র ৫.৮)। আবার,

$$\dot{\theta}_{x'} = \dot{\theta} \cos\psi \qquad \dot{\theta}_{y'} = -\dot{\theta} \sin\psi \qquad \dot{\theta}_{z'} = 0$$

এবং

$$\dot{\psi}_{x'} = 0 \qquad \dot{\psi}_{y'} = 0 \qquad \dot{\psi}_{z'} = \dot{\psi}$$

সুতরাং কৌণিক ভরবেগ $\underline{\omega}$ এর উপাংশ হল

$$\omega_{x'} = \dot{\varphi}_{x'} + \dot{\theta}_{x'} + \dot{\psi}_{x'} = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi$$

$$\omega_{y'} = \dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi \qquad (৫.২৬)$$

$$\omega_{z'} = \dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi}$$

স্থির অক্ষরেখা XYZ এর সাপেক্ষে $\underline{\omega}$-এর উপাংশ একইভাবে নির্ধারণ করা যায়। সুতরাং $\dot{\underline{\theta}}$ গতিবেগকে X এবং Y অক্ষরেখার দিকে ভাগ করে পাওয়া যায় $\dot{\theta}\cos\varphi$ এবং $\dot{\theta}\sin\varphi$; $\dot{\psi}$ ভাগ করে Z-অক্ষরেখার দিকে পাওয়া যায় $\dot{\psi}\cos\theta$ এবং XY তলে তার অভিক্ষেপ $\dot{\psi}\sin\theta$ আগের মতোই X-অক্ষরেখার সঙ্গে $\frac{\pi}{2} - \varphi$ কোণ সৃষ্টি করে। অতএব,

$$\omega_X = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi$$

$$\omega_Y = \dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \qquad (৫.২৭)$$

$$\omega_Z = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$$

এই উপাংশ সমীকরণগুলি অত্যন্ত দরকারী।

৫.৬ দৃঢ়বস্তুর গতিসংক্রান্ত অয়লার উপপাদ্য

দৃঢ়বস্তুর গতির ক্ষেত্রে আমরা জানি যে বস্তুটির যে কোন মুহূর্তে অবস্থান বর্ণনা করার জন্যে অয়লার কোণ (φ, θ, ψ) ব্যবহার করা যায়। বস্তুটির ঘূর্ণনের ফলে এই কোণগুলি সময়ের অপেক্ষক হয়ে যায়, যার ফলে স্থির স্থানাঙ্ক XYZ এবং চলমান স্থানাঙ্ক x y z এর মধ্যে রূপান্তর মেট্রিক্সও সময়ের উপর নির্ভরশীল হয়। যেহেতু $t = 0$ সময়ে প্রসঙ্গ-কাঠামো দুটি একসঙ্গে থাকে তাই রূপান্তর মেট্রিক্সের $A(t)$ এর উপর শর্ত হবে $A(0) = 1$। রূপান্তর মেট্রিক্সটি অবশ্যই সময়ের নিরবচ্ছিন্ন অপেক্ষক, তাই তা একক মান থেকে অবিচ্ছিন্নভাবে বিবর্তিত হয়। এজন্যেই রূপান্তর মেট্রিক্সের নির্ণায়ক $+1$।

অয়লারের উপপাদ্য অনুসারে "যে কোন দৃঢ়বস্তু যার একটি বিন্দু স্থির তার সাধারণ গতি হল কোন অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণন"।

বস্তু-সংলগ্ন স্থানাঙ্কের মূলবিন্দু যদি স্থির বিন্দুতে নেয়া যায় তাহলে স্পষ্টতই দৃঢ়বস্তুর গতিতে ঐ স্থানাঙ্কের সরণ অন্তর্ভুক্ত হবে না। উপপাদ্য অনুসারে যে কোন সময়ে কোন প্রাথমিক স্থানাঙ্কের একটি মাত্র ঘূর্ণনের মাধ্যমে বস্তু-সংলগ্ন স্থানাঙ্ক পাওয়া যায় এবং ঐ প্রাথমিক স্থানাঙ্ককে স্থির স্থানাঙ্ক হিসেবে নেয়া যায়। অন্য কথায় রূপান্তরের মেট্রিক্স কেবল একটি ঘূর্ণন মেট্রিক্স মাত্র।

এখন ঘূর্ণনের অর্থ হল যে একটি ঘূর্ণন অক্ষ থাকবে যার চারদিকে বস্তুটি ঘোরে। অবশ্যই ঘূর্ণন অক্ষরেখার দিকে শায়িত কোন সদিক রাশি রূপান্তর মেট্রিক্স দিয়ে প্রভাবিত হয় না কেননা ঐ দিকে কোন ঘূর্ণন নেই। সুতরাং অয়লারের উপপাদ্য দাবি করে যে এমন একটি সদিক রাশি $\underline{R}$ থাকবে যার জন্য

$$R' = AR = R \qquad (৫.২৮)$$

যেখানে মেট্রিক্স পদ্ধতিতে R এবং R′ স্তম্ভ সদিক রাশি। সাধারণভাবে লেখা যায়,

$$R' = AR = \lambda R \qquad (৫.২৯)$$

যেখানে λ একটি ধ্রুবক। এই সমীকরণ সার্থক করে λ-র যেসব মান তাদের বলে A মেট্রিক্সের সঠিক মান (আইগেন ভ্যালু)। অয়লার উপপাদ্য অনুসারে $\lambda = 1$।

(৫.২৯) সমীকরণকে লেখা যায়,

$$(A - \lambda 1)\, R = 0$$

যেখানে 1 একটি একক মেট্রিক্স। $\underline{R}$ সদিক রাশির উপাংশ x_1, x_2, x_3 হলে আমরা পাই,

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda)\, x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= 0 \\
a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda)\, x_2 + a_{23} x_3 &= 0 \\
a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + (a_{33} - \lambda)\, x_3 &= 0
\end{aligned} \qquad (৫.৩০)$$

এই তিনটি যুগপৎ সমীকরণের সমাধান করা যায় যদি সহগগুলির নির্ণায়ক শূন্য হয়,

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (৫.৩১)$$

এটাকে বলে A মেট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য বা সেকুলার সমীকরণ এবং এই সমীকরণের সমাধান বা মূলগুলি হল মেট্রিক্সের সঠিক মান λ_i।

(৫.৩১) নং সমীকরণের তিনটি মূল $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ এবং প্রত্যেকটি মূলের জন্য একটি করে সঠিক সদিক রাশি x_k (আইগেন ভেক্টর) থাকবে যার অংশগুলিকে x_{ik} লেখা যায়। এখানে প্রথম সূচক দিয়ে সদিক রাশির উপাংশ (x_1, x_2, x_3) এবং দ্বিতীয়টি দিয়ে বিশেষ মূলটিকে নির্দেশ করা হয়।

সুতরাং (৫.২৯) সমীকরণকে লেখা যায়,

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij}\, x_{jk} = \lambda_k\, x_{ik}$$

এখানে ডানদিকে k সূচকের উপরে যোগ করতে হবে না অর্থাৎ প্রতিটি k এর মানের জন্যে তিনটি করে সমীকরণ হবে, কেননা $i = 1, 2, 3$। এখন ক্রোনেকার ডেল্টা ব্যবহার করে লেখা যায়,

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, x_{jk} = \sum_{j} \lambda_k\, \delta_{jk}\, x_{ij} \qquad (৫.৩২)$$

(৫.৩২) সমীকরণের বামদিক হল AX কেননা X স্তম্ভ সদিক রাশির উপাংশ হল x_{jk} এবং ডান দিককে লেখা যায় ΛX যেখানে Λ মেট্রিক্সের উপাংশ হল $\lambda_k\, \delta_{jk}$ অর্থাৎ Λ একটি কর্ণায়িত মেট্রিক্স,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

সুতরাং (৫.৩২) সমীকরণকে লেখা যায়,

$$AX = X\Lambda \qquad (৫.৩৩)$$

কেননা মেট্রিক্স গুণনের নিয়ম অনুসারে (৫.৩৩) সমীকরণের ik উপাংশ নিলে (৫.৩২) সমীকরণ পাওয়া যায়। সুতরাং

$$X^{-1} A X = \Lambda \qquad (৫.৩৪)$$

অর্থাৎ A মেট্রিক্সকে X মেট্রিক্সের মাধ্যমে 'সমতুল রূপান্তর' করলে আমরা একটি কর্ণায়িত মেট্রিক্স পাই এবং ঐ কর্ণায়িত মেট্রিক্সের উপাংশগুলি হল সঠিক মান λ_i।

যেহেতু রূপান্তর মেট্রিক্স অভিলাম্বিক $(A^TA = 1)$, অতএব

$$(A - 1)\, A^T = 1 - A^T$$

উভয় দিকের নির্ণায়ক নিলে,

$$\det (A - 1)\ \det\ A^T = \det (1 - A^T)$$

কিন্তু ত্রিমাত্রিক ঘূর্ণনের জন্যে $\det A = \det A^T = 1$। সুতরাং

$$\det (A - 1) = \det\ (1 - A^T) = \det (1 - A)$$

অর্থাৎ একটি মেট্রিক্সের নির্ণায়ক ঐ একই মেট্রিক্সকে ঋণাত্মক করে তার নির্ণায়ক নিলে যে ফল হয় তার সমান। কিন্তু $n \times n$ মাত্রার মেট্রিক্সের জন্যে $\det (-B) = (-)^n \det B$। সুতরাং 3×3 মাত্রার মেট্রিক্সের ক্ষেত্রে, $\det (1 - A) = (-)^3 \det (A - 1)$ এবং তাই

$$\det (A - 1) = -\ \det (A - 1)$$

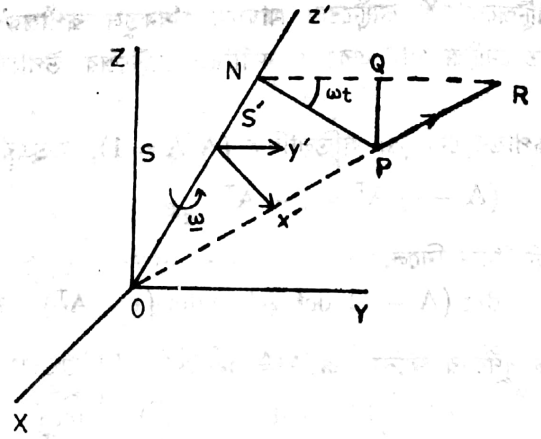
এবং এই সমীকরণ সঠিক হতে পারে যদি $\det (A - 1) = 0$ হয়। (৫.৩১) সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে $\lambda = 1$ এবং এটাই অয়লার উপপাদ্যের প্রমাণ।

৫.৭ ঘূর্ণমান স্থানাঙ্ক

ধরা যাক স্থির স্থানাঙ্ক S-এর সাপেক্ষে দ্বিতীয় একটি স্থানাঙ্ক S´ ON অক্ষরেখার চারপাশে $\underline{\omega}$ কৌণিক গতিবেগে ঘূর্ণনশীল। কৌণিক গতিবেগ $\underline{\omega}$-এর মান ω এবং দিক $\overrightarrow{ON}$ এবং তার ধনাত্মক দিক ডান-হাতি স্ক্রু-গতি দ্বারা নির্ধারিত হয়।

S´ প্রসঙ্গ কাঠামোয় P একটি স্থির বিন্দু নেয়া যায়। S প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে δt সময়ে P বিন্দু Q বিন্দুতে সরে যায় কেননা S ঘূর্ণায়মান। অবশ্য S´ স্থানাঙ্কে P যদি স্থির না হয়ে গতিশীল হয় তাহলে ঐ সময়ে তা অন্য আর একটি বিন্দু R-এ চলে যাবে।

সুতরাং S স্থানাঙ্কে কোন দর্শকের কাছে অবস্থানের পরিবর্তন হল $\overrightarrow{PR}$ এবং P বিন্দুর গতিবেগ তার কাছে হবে,



চিত্র ঃ ৫.৯

$$\underline{V}_S = \lim_{\delta t \to o} \frac{\vec{PR}}{\delta t} \qquad (৫.৩৫)$$

যেখানে S দিয়ে S প্রসঙ্গ কাঠামোর দর্শককে বোঝানো হয়।

অন্যদিকে S´ স্থানাঙ্কের দর্শকের কাছে অবস্থানের পরিবর্তন শুধু $\vec{QR}$ কেননা স্থানাঙ্ক ঘোরার জন্য P বিন্দু Q বিন্দুতে চলে যায় এবং Q বিন্দু থেকে অতিরিক্ত সরণ হল QR। সুতরাং S´-এর দর্শকের কাছে গতিবেগ হল

$$\underline{V}_{S'} = \lim_{\delta t \to o} \frac{\vec{QR}}{\delta t} \qquad (৫.৩৬)$$

ঘূর্ণন অক্ষের উপরে P থেকে লম্ব PN। সুতরাং δt সময়ে P বিন্দুর অতিক্রান্ত কোণ হল $\angle PNQ = \omega \delta t$ কেননা ω হল কৌণিক গতিবেগ। সুতরাং

$$PQ = \omega \delta t \; PN$$
$$= \omega \delta t \; OP \sin \beta$$

যেখানে β হল OP এবং ON রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ।

কিন্তু $\underline{\omega} \times \vec{OP}$ সদিক রাশির মান হল $\omega \; OP \sin \beta$ এবং তার দিক হল $\vec{PQ}$ সদিক রাশির দিক (ডান-হাতি স্ক্রু-গতির নিয়ম)।

অতএব

$$\vec{PQ} = \underline{\omega} \times \vec{OP}\,\delta t$$

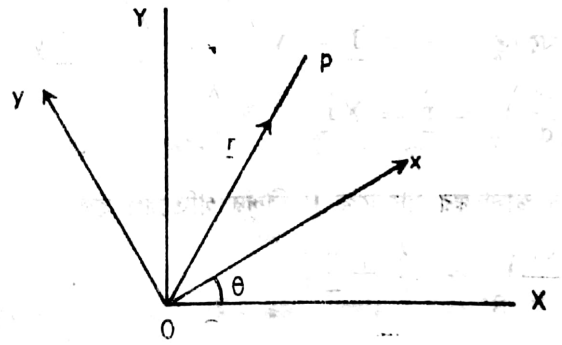
যখন $\delta t \to 0$, PQ-জ্যা PQ-চাপের সমান। সুতরাং

$$\vec{PR} = \vec{PQ} + \vec{QR} = \underline{\omega} \times \vec{OP}\,\delta t + \vec{QR} \qquad (৫.৩৭)$$

সুতরাং (৫.৩৫) এবং (৫.৩৬) সমীকরণ থেকে

$$\underline{V}_s = \underline{\omega} \times \underline{r} + V_S \qquad (৫.৩৮)$$

যেখানে $\underline{r}$ হল $\vec{OP}$ অবস্থান সদিক রাশি। সুতরাং স্থির স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে গতিবেগের দুটি অংশ থাকে : একটি চলমান স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে গতিবেগ এবং অন্যটি কৌণিক ভরবেগ এবং অবস্থান সদিক রাশির সদিক গুণন। অন্যভাবেও এই সমীকরণ নির্ধারণ করা যায়। ধরা যাক XY হল স্থির স্থানাঙ্ক এবং xy



চিত্র ঃ ৫.১০

ঘূর্ণায়মান স্থানাঙ্ক। Z অক্ষরেখা উভয়ের জন্য একই এবং তার চারপাশে xy স্থানাঙ্ক ঘোরে। ঘূর্ণায়মান স্থানাঙ্কের কৌণিক সরণ হল θ যা সময়ের উপর নির্ভরশীল। ধরা যাক OX এবং OY অক্ষরেখার দিকে স্থির একক সদিক

রাশি হল যথাক্রমে $\hat{\underline{I}}$ এবং $\hat{\underline{J}}$ এবং Ox আর Oy অক্ষরেখার দিকে একক সদিক রাশি হল যথাক্রমে $\hat{\underline{i}}$ এবং $\hat{\underline{j}}$ । সুতরাং (৫.৪) সমীকরণ অনুসারে,

$$\hat{\underline{i}} = \hat{\underline{I}} \cos\theta + \hat{\underline{J}} \sin\theta$$

$$\hat{\underline{j}} = -\hat{\underline{I}} \sin\theta + \hat{\underline{J}} \cos\theta$$

যেহেতু $\hat{\underline{i}}$ এবং $\hat{\underline{j}}$ একক সদিক রাশিদ্বয় সময়ের উপর নির্ভরশীল,

$$\frac{d\hat{\underline{i}}}{dt} = (-\hat{\underline{I}} \sin\theta + \hat{\underline{J}} \cos\theta)\,\dot{\theta} = \hat{\underline{j}}\,\dot{\theta} = \hat{\underline{j}}\,\omega$$

$$\frac{d\hat{\underline{j}}}{dt} = (-\hat{\underline{I}} \cos\theta - \hat{\underline{J}} \sin\theta)\,\dot{\theta} = -\hat{\underline{i}}\,\dot{\theta} = -\hat{\underline{i}}\,\omega$$

কেননা $\hat{\underline{i}}^2 = \hat{j}^2 = 1$ সমীকরণকে অন্তরকলন করে পাওয়া যায়

$$\hat{\underline{i}} \cdot \frac{d\hat{\underline{i}}}{dt} = \hat{\underline{j}} \cdot \frac{d\hat{\underline{j}}}{dt} = 0$$

অর্থাৎ $d\underline{i}/dt$ সদিক রাশি $\underline{i}$ সদিক রাশির উপর লম্ব (অর্থাৎ তা $\hat{\underline{j}}$) এবং $d\underline{j}/dt$ $\underline{j}$ সদিক রাশির উপর লম্ব (অর্থাৎ তা $-\underline{i}$ ডান-হাতি আইন অনুসারে)।

আবার যেহেতু $\underline{r} = X\hat{\underline{I}} + Y\hat{\underline{J}} = x\hat{\underline{i}} + \underline{j}\,y$, তাই লেখা যায়,

$$\left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_S = \dot{\underline{r}} = \dot{X}\hat{\underline{I}} + \dot{Y}\hat{\underline{J}}$$

কিন্তু ঘূর্ণায়মান স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে P বিন্দুর গতিবেগ হল

$$\left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_{S'} = \dot{x}\hat{\underline{i}} + \hat{\underline{j}}\,\dot{y}$$

কিন্তু

$$\left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_S = \dot{x}\,\hat{\underline{i}} + \hat{\underline{j}}\,\dot{y} + x\,\frac{d\hat{\underline{i}}}{dt} + y\,\frac{d\hat{\underline{j}}}{dt}$$

$$= \left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_{S'} + x\omega\,\hat{\underline{j}} - y\omega\hat{\underline{i}} = \left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_{S'} + \underline{\omega} \times \underline{r}$$

কেননা S´ স্থানাঙ্কের কৌণিক ভরবেগের সদিক রাশি $\underline{\omega}$ স্থির স্থানাঙ্কের Z অক্ষরেখার দিকে নেয়া হয়েছে ($\underline{\omega} = \hat{\underline{k}}\,\omega$)। সুতরাং

$$\left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_{S'} + \underline{\omega} \times \underline{r}$$

যদিও এই সমীকরণ অবস্থান সদিক রাশির জন্য নির্ধারণ করা হয়েছে কিন্তু তা যে কোন সদিক রাশির জন্য সত্য,

$$\left(\frac{d\underline{A}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\underline{A}}{dt}\right)_{S'} + \underline{\omega} \times \underline{r} \qquad (৫.৩৯)$$

সুতরাং একটি স্থানাঙ্ক S´ অন্য আর একটি স্থানাঙ্ক S এর পরিপ্রেক্ষিতে ঘূর্ণায়মান হলে সময়-অন্তরকলনের সম্পর্ক হবে,

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_S = \left(\frac{d}{dt}\right)_{S'} + \underline{\omega} \times \qquad (৫.৪০)$$

যদি ঘূর্ণায়মান স্থানাঙ্কে একটি অতিরিক্ত রৈখিক গতিবেগ $\underline{V}$ (স্থির স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে) থাকে, তাহলে (৫.৩৮) সমীকরণ আরো সাধারণভাবে লেখা যায়,

$$\underline{V}_s = \underline{V} + \underline{V}_s + \underline{\omega} \times \underline{r} \qquad (৫.৪১)$$

যেখানে $\underline{\omega} \times \underline{r}$ হল ঘূর্ণায়মান অক্ষের ঘূর্ণনের জন্যে গতিবেগ।

৫.৮ কারিওলিস বল

জড়প্রসঙ্গ কাঠামোয়, নিউটনের গতিসমীকরণ হল

$$\underline{F} = m\,\underline{a}_s = m\left(\frac{d\,\underline{v}_s}{dt}\right)_S \qquad (৫.৪২)$$

যেখানে S দিয়ে স্থির স্থানাঙ্ক নির্দেশ করা হয়েছে। কিন্তু

$$\underline{v}_s = \underline{V} + \underline{v}_{s'} + \underline{\omega} \times \underline{r}$$

সুতরাং যেহেতু ধ্রুব কৌণিক গতিবেগের জন্য $\dot{\omega} = 0$,

$$\underline{F} = m\left(\frac{d^2\underline{R}}{dt^2}\right)_S + m\left(\frac{d\underline{v}_{s'}}{dt}\right)_S + m\,\underline{\omega} \times \left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_S \qquad (৫.৪৩)$$

যেখানে $\underline{R}$ হল স্থানাঙ্কদ্বয়ের মূলবিন্দুর দূরত্ব। (৫.৪০) সমীকরণ

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_S = \left(\frac{d}{dt}\right)_{S'} + \underline{\omega} \times$$

ব্যবহার করে আমরা পাই,

$$\left(\frac{d\underline{v}_{S'}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\underline{v}'_s}{dt}\right)_{S'} + \omega \times \underline{v}'_s$$

$$= \underline{a}_{S'} + \underline{\omega} \times \underline{V}_{S'} \qquad (৫.৪৪)$$

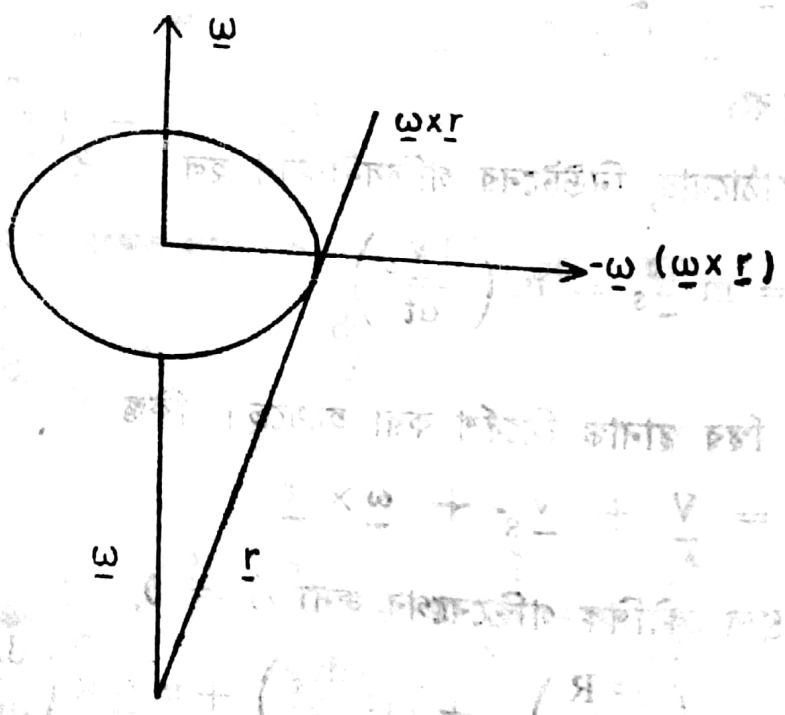
যেখানে $\underline{a}_{S'}$ হল ঘূর্ণায়মান স্থানাঙ্কের ত্বরণ এবং

$$\underline{\omega} \times \left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_S = \underline{\omega} \times \left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_{S'} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$$

$$= \underline{\omega} \times \underline{v}_{S'} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$$

সুতরাং

$$\underline{F} = m\ddot{\underline{R}}_S + m\,\underline{a}_{S'} + 2m\,\underline{\omega} \times \underline{v}_{S'} + m\,\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) \qquad (৫.৪৫)$$



চিত্র : ৫.১১

যেখানে $m\ddot{\underline{R}}_S$ অংশটি হল স্থির স্থানাঙ্ক S-এর সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান স্থানাঙ্ক S´-এর মূলবিন্দুর ত্বরণ। এই অংশ বেশির ভাগ ক্ষেত্রে বাদ দেয়া যায়। সুতরাং

$$\underline{F} - 2m\,\underline{\omega} \times \underline{v}_{S'} - m\,\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = m\,\underline{a}_{S'} \quad (৫.৪৬)$$

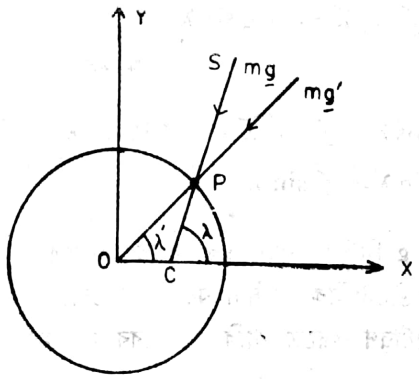
অর্থাৎ ঘূর্ণায়মান স্থানাঙ্ক S´-এ অবস্থিত দর্শকের কাছে বল নিউটনীয় বল $\underline{F}$ নয়, বরং তার কাছে প্রকৃত বল হল

$$\underline{F} - 2m\,\underline{\omega} \times \underline{V}_{S'} - m\,\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$$

যার শেষ অংশটি কেন্দ্রাতিগ বল (চিত্র ৫.১১) এবং যখন $\underline{\omega}$ ও $\underline{r}$ পরস্পরের উপর লম্ব তখন এই অংশের মান $-m\omega^2 r$। বলের অন্য অংশটিকে বলে 'করিওলিস বল' $-2m\,\underline{\omega} \times \underline{V}_{S'}$।

৫.৯ কেন্দ্রাতিগ বলের প্রভাব

পৃথিবী-পৃষ্ঠে সরল দোলকের উপর পৃথিবীর নিজস্ব অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণনের প্রভাব নির্ধারণ করা যায়। ধরা যাক দোলকটি S বিন্দু থেকে ঝুলানো হয়েছে এবং



চিত্র : ৫.১২

তার ভর xy তলে অবস্থিত। পৃথিবীর নিজস্ব ঘূর্ণনের জন্যে দোলকটি সঠিক লম্ব থেকে কিছুটা সরে যাবে।

ধরা যাক দোলকের উপর বল হল $T = mg$, পৃথিবীর কেন্দ্রের সঙ্গে P বিন্দুর সংযোগকারী রেখা PO বিষুবরেখা OX-এর সঙ্গে যে কোণ তৈরি করে তা হল λ' এবং দোলকটি OX-এর সঙ্গে যে কোণ তৈরি করে তা হল λ। দোলকটির উপরে পৃথিবীর মাধ্যাকর্ষণ বল হল $m\,\underline{g}$ যা নিউটনের মাধ্যাকর্ষণ সূত্র থেকে পাওয়া যায়,

$$m\,\underline{g} = \underline{\hat{R}}\, G_N\, \frac{mM_E}{R}$$

যেখানে R পৃথিবীর ব্যাসার্ধ এবং M_E পৃথিবীর ভর।

দোলকের ভর বাস্তবিকপক্ষে $m\underline{g}$ নয় কেননা পৃথিবীর ঘূর্ণনের জন্যে $\underline{g}$ এবং g সমান হয় না। পৃথিবীর সঙ্গে সংশ্লিষ্ট স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে দোলকের গতিবেগ $\underline{V}_s = 0$; সুতরাং তার উপর করিওলিস বল নেই। P বস্তুর ঘূর্ণন অক্ষ থেকে দূরত্ব $r = R\cos\lambda$, তাই তার কেন্দ্রাতিগ বল হল $m\,\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = -m\omega^2 R\cos\lambda$। সুতরাং দোলকের উপর পৃথিবীর আকর্ষণী বল হল

$$m\,\underline{g} = m\,\underline{g} - m\,\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = m\,\underline{g} + \underline{i}\, m\omega^2 R\cos\lambda$$

যা OX অক্ষরেখার C বিন্দুর অভিমুখী। এই সমীকরণকে উপাংশে ভাগ করে আমরা পাই,

$$-g\cos\lambda' = -g\cos\lambda + \omega^2 R\cos\lambda'$$

$$-g\sin\lambda' = -g\sin\lambda$$

সুতরাং

$$g\cos\lambda = g\cos\lambda' - \omega^2 R\cos\lambda'$$

$$g\sin\lambda = g\sin\lambda'$$

পরীক্ষণাগারে আমরা g নির্ধারণ করি এবং সরল দোলকের আনতি কোণ λ কে জ্যোতির্বিদ্যাগত বা ভৌগোলিক দ্রাঘিমা বলে। সুতরাং g এবং λ জানা থাকলে আমরা g এবং λ' নির্ধারণ করতে পারি। উপরের সমীকরণ থেকে,

$$g(\sin\lambda\cos\lambda' - \cos\lambda\sin\lambda') = \omega^2 R\sin\lambda'\cos\lambda'$$

অর্থাৎ

$$g\sin(\lambda - \lambda') = \frac{\omega^2 R}{g}\sin\lambda'\cos\lambda'$$

যেহেতু $\omega^2 R/g$ খুব ছোট তাই

$$\lambda - \lambda' = \frac{\omega^2 R}{2g} \sin 2\lambda'$$

এবং আসন্নমানে,

$$g = \sqrt{(g' \cos\lambda' - \omega^2 R \cos\lambda')^2 + (g' \sin\lambda')^2}$$
$$= g' - \omega^2 R \cos\lambda'$$

এখানে λ' কোণকে ভূকেন্দ্রিক দ্রাঘিমা বলে এবং ভূপৃষ্ঠে যথার্থ লম্বের দিক দেয় এই কোণ। ভৌগোলিক দ্রাঘিমা এবং ভূতাত্ত্বিক দ্রাঘিমার পার্থক্য সবচেয়ে বেশি হয় যখন $\lambda' = 45°$ এবং সেক্ষেত্রে

$$\lambda - \lambda' = \tfrac{1}{2} \frac{\omega^2 R}{g} = 1.725 \times 10^{-3} \text{ রেডিয়ান} \approx ৬ \text{ মি.}$$

পাওয়া যায় [$\omega = 7.29 \times 10^{-5}$ রেডিয়ান / সে., $R = 6370$ কি.মি. এবং $g = 981$ সেমি / (সে.)^2]। সুতরাং কোন স্থানে সত্যিকারের খাড়া লম্বের দিক এবং আপাত লম্বের দিকের মধ্যে কোণের পার্থক্য প্রায় ৬ মিনিট। অবশ্য আরো সঠিকভাবে গণনা করতে হলে পৃথিবীর আকৃতি যে উত্তর-দক্ষিণে কিছু চাপা তা বিবেচনা করা দরকার হয়।

৫.১০ করিওলিস বলের প্রভাব

পৃথিবীর মাধ্যাকর্ষণ বলের অধীনে মুক্ত পতনশীল একটি বস্তুর গতিতে করিওলিস বলের প্রভাবে সমান্তরাল দিকে কিছুটা সরণ ঘটে। বস্তুর ত্বরণ হল

$$\underline{a}_{s'} = \underline{g} - 2\underline{\omega} \times \underline{V}_{s'}$$

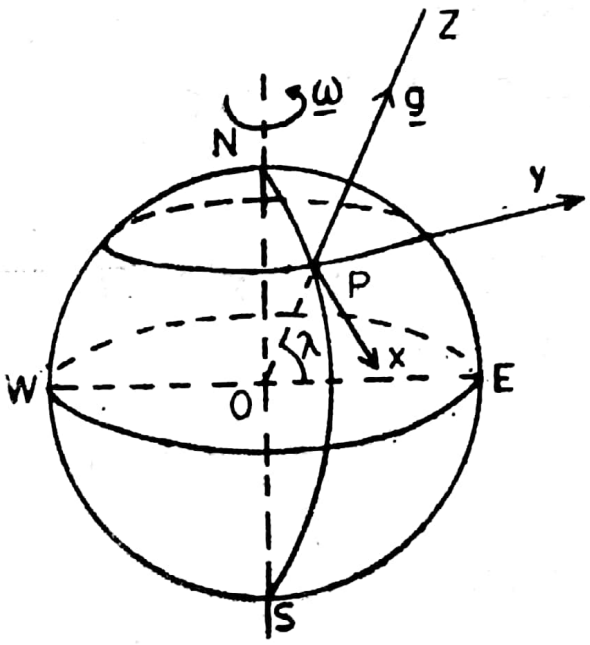
যেখানে $\underline{g}$ মাধ্যাকর্ষণজনিত ত্বরণ। পৃথিবীপৃষ্ঠের P বিন্দুতে (উত্তর গোলার্ধে) Oxyz স্থানাঙ্ক স্থাপন করে লেখা যায়,

$$\underline{\omega} = \omega(-\hat{\underline{i}} \cos\lambda + \hat{\underline{k}} \sin\lambda)$$

বস্তুকণা h উচ্চতা থেকে পড়ে এবং t সময়ে অর্জিত গতিবেগ $\underline{V}_{s'}$ হলে,

$$\underline{V}_{s'} = -gt\hat{\underline{k}}$$

যেহেতু এটা স্থির অবস্থা থেকে নিচের দিকে পড়ে।



চিত্র : ৫.১৩

সুতরাং $\underline{\omega} \times \underline{v}_{S'} = -g\omega t \cos\lambda \, \hat{\underline{j}}$ এবং $\underline{g} = -g \, \hat{\underline{k}}$ এবং তাই

$$\underline{a}_{S'} = -\hat{\underline{k}} g + \hat{\underline{j}} \, 2g\omega t \cos\lambda$$

এখানে কেন্দ্রাতিগ বল বাদ দেয়া হয়েছে কেননা তা ω^2-এর সমানুপাতিক। অতএব বলা যায় যে করিওলিস বল উত্তর গোলার্ধে পূর্বদিকে (y অক্ষের দিকে) একটি ত্বরণ সৃষ্টি করে। বস্তুকণার y-দিকে সমীকরণ লেখা যায়,

$$\ddot{y} = 2g\omega t \cos\lambda$$

যা সমাধান করে,

$$y = \tfrac{1}{3} g\omega \cos\lambda \, t^3$$

কেননা $t = 0$ সময়ে $\dot{y} = 0$। আবার z-দিকে সমীকরণ হল,

$$\ddot{z} = -g$$

যা থেকে পাওয়া যায়,

$$z = h - \tfrac{1}{2} gt^2$$

কেননা বস্তুকণা $t = 0$ সময়ে h উচচতা থেকে পড়তে শুরু করে। সুতরাং ঐ উচচতা থেকে পড়ার সময় হল

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

এবং পূর্বদিকের সরণের পরিমাণ হল

$$d = \frac{1}{3}\, g\omega \cos\lambda \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} = \omega \cos\lambda \sqrt{\frac{8h^3}{9g}} \qquad (৫.৪৭)$$

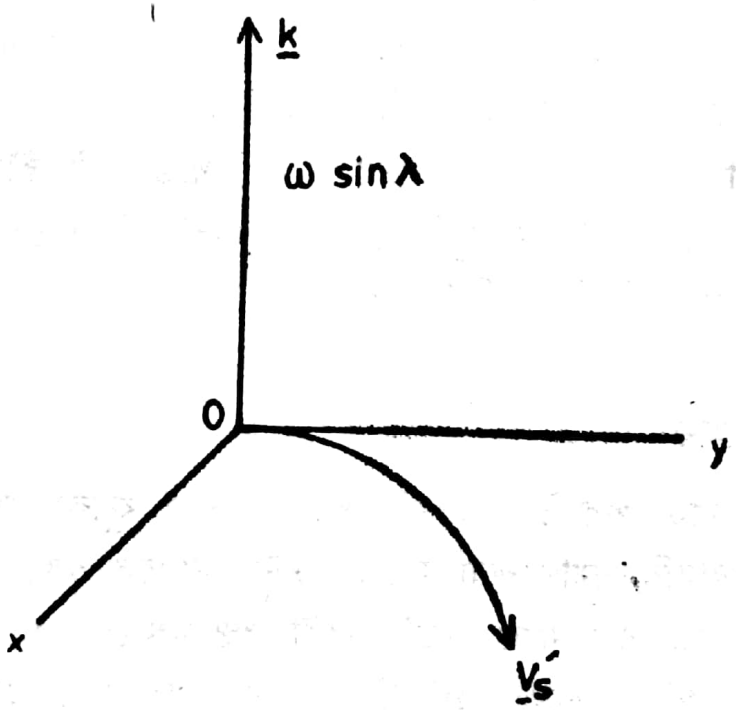
৫.১১ বায়ুগতি

পৃথিবীপৃষ্ঠে কোন বস্তুকণার গতি পৃথিবীর তার নিজস্ব অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণনের কারণে বিপুলভাবে নিয়ন্ত্রিত হয়; সূর্যের চারদিকে পৃথিবীর আবর্তন বা সূর্যমণ্ডলের ছায়াপথে পরিক্রমণ ইত্যাদি গতির প্রভাব খুবই কম।

সুতরাং পৃথিবীপৃষ্ঠে স্থাপন করা কোন স্থানাঙ্কের গতি সূর্যকে মূলবিন্দু ধরে একটা স্থির প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে শুধু ঘূর্ণন বলেই বিবেচনা করা যায়।

এখন পৃথিবীপৃষ্ঠে তার নিজস্ব অক্ষের ঘূর্ণনের জন্য কৌণিক গতিবেগ $\underline{\omega}$ এবং এই সদিক রাশির দিক হল উত্তর দিকে, কেননা পৃথিবী পশ্চিম থেকে পূর্বদিকে ঘোরে। সুতরাং উত্তর গোলার্ধে $\underline{\omega}$ সদিক রাশির উপাংশ হল স্থানীয় উল্লম্বের (z-অক্ষের) দিকে $\omega \sin\lambda$ কেননা $\underline{\omega} = \omega(-\,i\cos\lambda + \hat{\underline{k}}\sin\lambda)$ যেখানে λ হল P বিন্দুর দ্রাঘিমা।

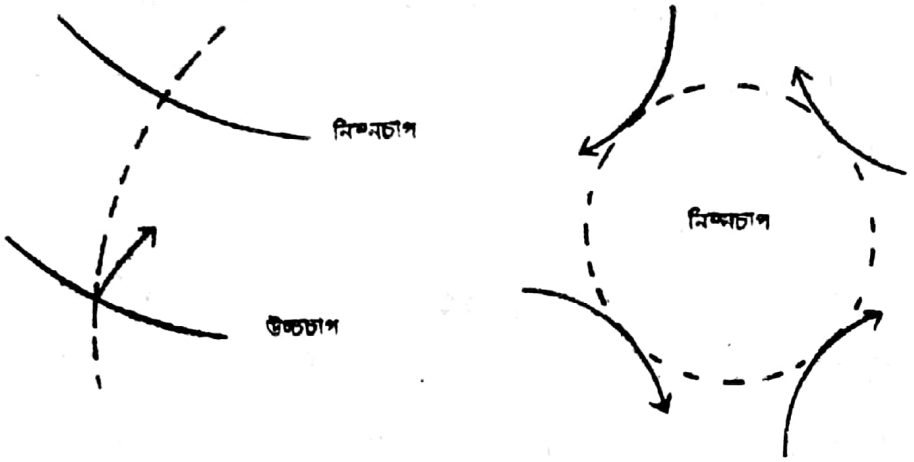
বস্তুকণাটি যদি সমান্তরাল তলে অর্থাৎ স্থানীয় xy তলে $\underline{V}_s'$ গতিবেগে নিক্ষিপ্ত হয়, তাহলে করিওলিস বলের $(-2m\,\underline{\omega} \times \underline{V}_s')$ একটি উপাংশ ঐ তলে থাকবে



চিত্র : ৫.১৪

যার মান হল $2mv\omega \sin\lambda$ এবং যার দিক হবে x-অক্ষের দিকে অর্থাৎ বস্তুকণার গতির ডানদিকে। সুতরাং বস্তুকণাটি তার প্রাথমিক দিক থেকে ডানদিকে সরে যাবে। এই করিওলিস বিচ্যুতির সর্বোচ্চ মান হল উত্তর মেরুতে ($\lambda = 90^\circ$) এবং সর্বনিম্ন বিষুব রেখায়। দক্ষিণ গোলার্ধে এই বিচ্যুতি ঠিক উল্টা দিকে।

বায়ুগতির বিন্যাসে করিওলিস বলের তাৎপর্যপূর্ণ ভূমিকা রয়েছে। বায়ু উচ্চচাপের অঞ্চল থেকে নিম্নচাপের অঞ্চলে যায়।

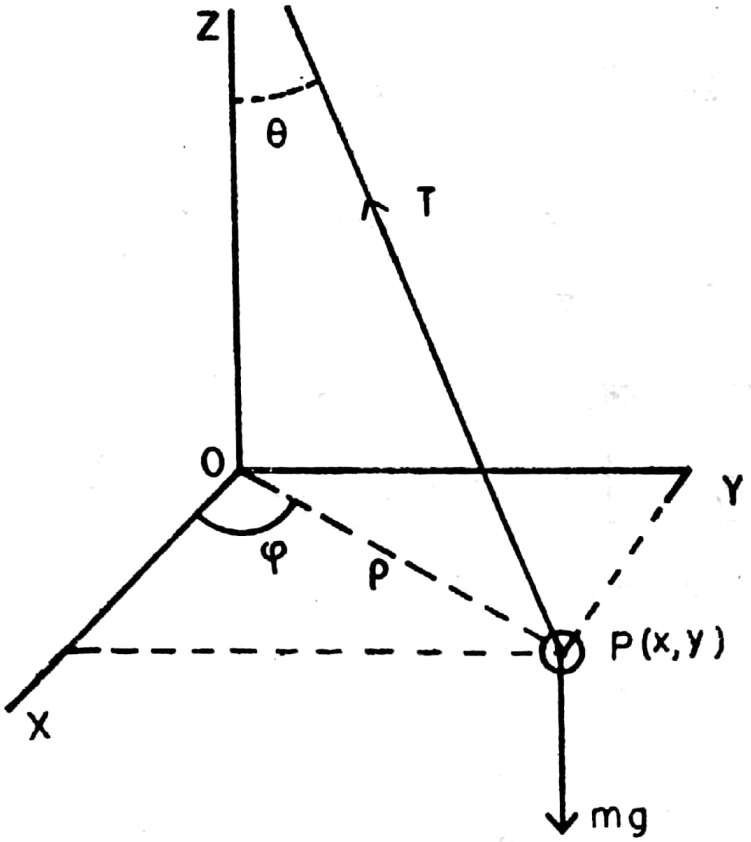


চিত্র ঃ ৫.১৫

সমান্তরাল তলে বস্তুকণার দীর্ঘমেয়াদী এবং অব্যাহত গতিকেই বলে বায়ু-প্রবাহ। করিওলিস বল না থাকলে বায়ু চাপের পার্থক্য অনুসারে গতিশীল হত অর্থাৎ সমচাপের (isobar) উপর লম্ব হত বায়ুর গতির দিক। কিন্তু উত্তর গোলার্ধে করিওলিস বল বায়ুকে ডানদিকে সরিয়ে দেয়। এই ডানদিকে বিচ্যুতি চলতে থাকে যতক্ষণ পর্যন্ত না বায়ুর গতি সমচাপ রেখার সমান্তরাল হয়। তারপর বায়ু উত্তর গোলার্ধে নিম্নচাপ কেন্দ্রের চারদিকে ঘড়ির বিপরীত দিকে ঘুরতে থাকে। সুতরাং উত্তর গোলার্ধে ঘূর্ণিঝড় (cyclone) ঘড়িগতির বিপরীত দিকে এবং দক্ষিণ গোলার্ধে ঘড়িগতির দিকে ঘোরে।

৫.১২ ফুকো দোলক

ঘূর্ণায়মান স্থানাঙ্ক পদ্ধতির একটি প্রয়োগ হল ফুকো দোলক যা দিয়ে পৃথিবীর ঘূর্ণন সরাসরি প্রমাণ করা যায়। এটা আসলে একটা সাধারণ দোলক কিন্তু দণ্ডটি খুব বড় যার সঙ্গে একটি ভারী বস্তু সংযুক্ত করা হয়। দোলকের গতির উপর করিওলিস বলের প্রতিক্রিয়া হল সময় অনুসারে স্পন্দন তলের অয়নগতি (precession)।



চিত্র ঃ ৫.১৬

একটি স্থানাঙ্ক স্থাপন করা যায় যার মূলবিন্দু হল দোলকের স্থিরবিন্দু এবং স্থানীয় উল্লম্ব হল z-অক্ষরেখা। দোলক-ভরের গতি xy তলে এবং দোলকের স্পন্দন ক্ষুদ্র ধরে নেয়া হবে।

দোলক-ভরের ত্বরণ হল,

$$\underline{a}_{s'} = \underline{g} + \frac{1}{m}\underline{T} - 2\underline{\omega} \times \underline{V}_{s'} \qquad (৫.৪৮)$$

যেখানে দণ্ডের টান হল $\underline{T}$। দণ্ডের দৈর্ঘ্য যদি l হয় তবে $\sin\theta = \rho/l$ যেখানে $OP = \rho$। $\underline{T}$ টানের PO রেখার দিকে উপাংশ হল $T\sin\theta$ এবং OZ রেখার দিকে $T\cos\theta = T$ যখন θ খুব ক্ষুদ্র। সুতরাং OX এবং OY অক্ষরেখার দিকে উপাংশ নিয়ে,

$$T_x = -T\sin\theta\cos\varphi = -T\frac{\rho}{l}\cdot\frac{x}{\rho} = -T\frac{x}{l}$$

$$T_y = -T\sin\theta\sin\varphi = -T\frac{y}{l}$$

$$T_z = -T\cos\theta = -T$$

আবার

$$g_x = g_y = 0 \qquad g_z = -g$$

এবং

$$\omega_x = -\omega \cos\lambda \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = \omega \sin\lambda$$

যেখানে λ হল স্থানীয় দ্রাঘিমা।

দোলক-ভরের গতিবেগের উপাংশ হল $\dot{x}$ ও $\dot{y}$ এবং

$$\underline{\omega} \times \underline{V_s'} = \hat{\underline{i}}\, \dot{y}\, \omega \sin\lambda + \hat{\underline{j}}\, \dot{x}\, \omega \sin\lambda - \hat{\underline{k}}\, \omega \dot{y} \sin\lambda$$

সুতরাং গতিসমীকরণগুলি হল,

$$\ddot{x} = -\frac{T}{m}\frac{x}{l} + 2\dot{y}\omega \sin\lambda$$

$$\ddot{y} = -\frac{T}{m}\frac{y}{l} - 2\dot{x}\omega \sin\lambda$$

$$0 = -g - \frac{T}{m} + 2\omega\dot{y} \sin\lambda$$

ক্ষুদ্র গতিবেগের জন্য শেষ সমীকরণ থেকে লেখা যায়,

$$T = mg$$

সুতরাং

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\omega' \dot{y}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\omega' \dot{x}$$

যেখানে

$$\omega_0^2 = g/l \qquad \text{এবং} \qquad \omega' = \omega \sin\lambda$$

সুতরাং $\xi = x + iy$ লিখে এই দুটি সমীকরণ একত্রে লেখা যায়,

$$\ddot{\xi} + 2i\omega'\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0$$

সমাধান করে,

$$\xi = e^{-i\omega' t}\left[A e^{i\sqrt{\omega_0^2 + \omega'^2}\, t} + B e^{-i\sqrt{\omega_0^2 + \omega'^2}\, t}\right]$$

যেখানে A এবং B দুটি ধ্রুবক। যেহেতু দোলকের স্পন্দনসংখ্যা ω_0 অনেক বড় এবং পৃথিবীর কৌণিক গতি ω অনেক ছোট, তাই

$$\xi = e^{-i\omega' t}\left(A\, e^{i\omega_0 t} + B\, e^{-i\omega_0 t}\right)$$

$$= \xi_0\, e^{-i\omega' t}$$

সুতরাং

$$x = \cos\omega' t\; x_0 + y_0 \sin\omega' t$$

$$y = -\sin\omega' t\; x_0 + y_0 \cos\omega' t$$

অর্থাৎ (x_0, y_0) অক্ষাংশ z-অক্ষের চারদিকে $\omega' t$ কোণে ঘুরে (x, y) অক্ষাংশে পরিণত হয়। সুতরাং স্পন্দন তল ω' কৌণিক বেগে ঘূর্ণনশীল। ঘূর্ণনতলের এই সরে যাওয়া সরাসরি দেখা যায় যদি দোলক-ভরের সঙ্গে একটি পিন লাগিয়ে রাখা হয়। ঐ পিনটি সমান্তরাল তলে স্পন্দনতলের ঘূর্ণন অনুসারে একটি রেখা অঙ্কিত করে এবং তা থেকে পৃথিবীর কৌণিক গতিবেগ পাওয়া যায়।

উদাহরণ ১

উত্তর গোলার্ধের কোন স্থানে যার দ্রাঘিমা λ একটি বস্তুকে পূর্বদিকে u গতিবেগে এবং সমান্তরালের সঙ্গে α আনতি কোণে নিক্ষেপ করা হল। দেখাও যে যখন নিক্ষিপ্ত বস্তুটি পৃথিবীপৃষ্ঠে ফিরে আসে তখন তার পাশের দিকে সরণের পরিমাণ হল,

$$d = \frac{4u^3}{g^2}\,\omega \sin\lambda \sin^2\alpha \cos\alpha$$

যেখানে ω পৃথিবীর কৌণিক গতিবেগ।

সমাধান: ঘূর্ণায়মান স্থানাঙ্কে ত্বরণ হল

$$\underline{a}_{s'} = \underline{g} + 2\underline{\dot{V}}_{s'} \times \underline{\omega} = \underline{\dot{V}}_{s'}$$

এই সমীকরণের আসন্নমানে সমাধানের জন্যে লেখা যায়,

$$\underline{V}_{s'} = \underline{V}_1 + \underline{V}_2$$

$$\underline{\dot{V}}_1 = \underline{g}$$

এখন করিওলিস বলের অংশে $\underline{V}_2$-এর জায়গায় $\underline{V}_1$ লিখে,

$$\dot{\underline{V}}_1 + \dot{\underline{V}}_2 = \underline{g} + 2\,\underline{V}_1 \times \underline{\omega}$$

কিন্তু উপরের সমীকরণ থেকে

$$\dot{\underline{V}}_2 = 2\,\underline{V}_1 \times \underline{\omega}$$

এবং

$$\underline{V}_1 = \underline{g}t + \underline{V}_0$$

যেখানে $\underline{V}_0$ ধ্রুব সদিক রাশি। সুতরাং

$$\dot{\underline{V}}_2 = 2\,\underline{g} \times \underline{\omega}\,t + 2\,\underline{V}_0 \times \underline{\omega}$$

সমাকলন করে,

$$\underline{V}_2 = \underline{g} \times \underline{\omega}\,t^2 + 2t\ \underline{V}_0 \times \underline{\omega}$$

অতএব

$$\underline{V} = \underline{g}t + \underline{V}_0 + \underline{g} \times \underline{\omega}\,t^2 + 2t\,\underline{V}_0 \times \underline{\omega}$$

সমাকলন করে,

$$\underline{r} = \underline{g}\,\frac{t^2}{2} + \underline{h} + \frac{t^3}{3}\,\underline{g} \times \underline{\omega} + t^2\,\underline{V}_0 \times \underline{\omega} + \underline{V}_0 t$$

যেখানে $\underline{h}$ প্রাথমিক উচ্চতা।

প্রদত্ত প্রশ্নে, P বিন্দুতে Oxyz স্থানাঙ্ক নিয়ে লেখা যায়,

$$\underline{h} = 0 \qquad \underline{g} = -\,\underline{\hat{k}}\,g \qquad \underline{\omega} = -\,\underline{i}\,\omega\cos\lambda + \underline{\hat{k}}\,\omega\sin\lambda$$

এবং

$$\underline{V}_0 = \underline{\hat{j}}\,u\cos\alpha + \underline{\hat{k}}\,u\sin\alpha$$

যেহেতু বস্তুটি পূর্বদিকে নিক্ষিপ্ত হয়েছে। সুতরাং

$$\underline{g} \times \underline{\omega} = \underline{\hat{j}}\ \omega g\cos\lambda$$

$$\underline{V}_0 \times \underline{\omega} = \underline{\hat{k}}\ u\,\omega\cos\lambda\cos\alpha + \underline{i}\,u\omega\cos\alpha\sin\lambda - \underline{j}\,u\omega\cos\lambda\sin\alpha$$

অতএব

$$x = t^2\, u\omega \cos\alpha \sin\lambda$$

$$y = \omega g \cos\lambda \frac{t^3}{3} - t^2\, u\omega \cos\lambda \sin\alpha + u\cos\alpha t$$

$$z = -g\frac{t^2}{2} + t^2\, u\omega \cos\lambda \cos\alpha + ut \sin\alpha$$

তৃতীয় সমীকরণের দ্বিতীয় অংশ বাদ দিয়ে (যেহেতু ω ক্ষুদ্র),

$$t = \frac{2u \sin\alpha}{g}$$

সুতরাং

$$d = \left(\frac{2u \sin\alpha}{g}\right)^2 u\omega \cos\alpha \sin\lambda$$

$$= \frac{4u^3}{g^2}\, \omega \cos\alpha \sin^2\alpha \sin\lambda$$

উদাহরণ ২

একটি বস্তুকণা u গতিবেগে খাড়াভাবে নিক্ষিপ্ত করা হল এবং তা সর্বোচ্চ বিন্দুতে উঠে আবার ভূপৃষ্ঠে পড়ে যায়। দেখাও যে বস্তুকণা যখন পৃথিবী-পৃষ্ঠে ফিরে আসে তখন যে করিওলিস বিচ্যুতি তা ঐ একই উচ্চতায় স্থির অবস্থা থেকে বস্তুকণাটি ফেলে দিলে যে করিওলিস বিচ্যুতি হয় তার চারগুণ কিন্তু বিপরীত দিকে।

সমাধান : এক্ষেত্রে

$$\underline{V}_0 = \hat{\underline{k}}\, u$$

$$\underline{g} = -g\, \hat{\underline{k}}$$

$$\underline{\omega} = -\hat{\underline{i}}\, \omega \cos\lambda + \hat{\underline{k}} \sin\lambda$$

সুতরাং

$$\underline{V} = -gt\, \hat{\underline{k}} + t^2\, \underline{j}\, \omega g \cos\lambda + 2t\,(-\underline{j}\, u\omega \cos\lambda) + \underline{k}\, u$$

অর্থাৎ

$$v_x = 0 \qquad v_y = t^2\, g\omega \cos\lambda - 2t\, u\omega \cos\lambda \qquad v_z = u - gt$$

সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠার সময় t_1 হল,

$$0 = u - gt_1$$

অর্থাৎ

$$t_1 = \frac{u}{g}$$

আবার পূর্বের উদাহরণের $\underline{r}$ সদিক রাশি থেকে অথবা $\underline{v}$ কে সমাকলন করে,

$$x = 0, \quad y = \frac{t^2}{3} g\omega \cos\lambda - t^2 u\omega \cos\lambda, \quad z = ut - \tfrac{1}{2}gt^2$$

সুতরাং সর্বোচ্চ উচ্চতা হল

$$h = ut_1 - \tfrac{1}{2} g t_1^2 = \frac{u^2}{2g}$$

অতএব করিওলিস বিচ্যুতি হল

$$y = \frac{t_1^3}{3} g\omega \cos\lambda - t_1^2 u \omega \cos\lambda$$

$$= -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\,\omega \cos\lambda$$

অর্থাৎ বিচ্যুতি পশ্চিম দিকে।

অন্যদিকে যদি বস্তুকণাটি h উচ্চতা থেকে পড়ে তাহলে, করিওলিস বিচ্যুতি হল

$$\acute{y} = \frac{t^3}{3} \omega g \cos\lambda$$

যেখানে

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

সুতরাং

$$\acute{y} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\,\omega \cos\lambda$$

অর্থাৎ y হল $\acute{y}$ এর চারগুণ এবং বিপরীত দিকে।

প্রশ্নমালা

১। একটি অমসৃণ সমান্তরাল তলের উপরে একটি সুষম গোলকের গতির সাধারণ সমীকরণগুলি নির্ধারণ কর। আরোপিত বলসমূহ গোলকের কেন্দ্রের মধ্য দিয়ে যায়। দেখাও যে যদি গোলকটি না পিছলে শুধু সরণ গতিসম্পন্ন হয় তাহলে তার সরণ একটি বস্তুকণার সরণের সমান হবে যার ভর সমান এবং যা মসৃণ সমান্তরাল তলে একই দিকে একই আরোপিত বলের অধীনে গতিশীল কিন্তু যার উপরে সক্রিয় বল গোলকের উপরে বলের পরিমাণের ৫/৭ গুণ।

২। একটি সুষম ঘন গোলক না পিছলে একটি অমসৃণ তলের উপরে ঘুরে যায় এবং তলটিও একটি উল্লম্ব অক্ষের চারদিকে সুষম কৌণিক গতিতে ঘূর্ণমান। যদি গোলকের ওজন এবং স্পর্শবিন্দুতে ঘর্ষণবল ছাড়া গোলকের উপর অন্য কোন বল সক্রিয় না হয় তাহলে দেখাও যে গোলকের কেন্দ্রের গতিপথ একটি বৃত্ত।

৩। একটি সুষম গোলক না পিছলে একটি উল্লম্ব অমসৃণ চোঙের ভিতরে ঘোরে। তার গতিসমীকরণ নির্ধারণ কর।

৪। একটি অমসৃণ সমান্তরাল তলে a ব্যাসার্ধের একটি চাকতি না পিছলে ঘোরে। দেখাও যে গতিসমীকরণগুলি হল,

$$3\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta + 4\omega\dot{\varphi}\sin\theta = -2\frac{9}{\alpha}\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\dot{\varphi}\sin^2\theta - 2\omega\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

$$2\dot{\omega} - \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta = 0$$

যেখানে সমান্তরালের সঙ্গে চাকতির তল যে কোণ তৈরি করে তা θ, স্পর্শবিন্দুর মধ্য দিয়ে যাওয়া ব্যাসের উল্লম্ব তলের কৌণিক বেগ $\dot{\varphi}$ এবং চাকতির প্রতিসাম্য অক্ষের কৌণিক বেগ হল ω।

যদি চাকতি তার তল উল্লম্ব রেখে সরলরেখায় ঘুরতে ঘুরতে যায়, তবে দেখাও যে গতি স্থায়ী হয় যখন $\omega > \frac{1}{2}\sqrt{g/a}$।

৫। পৃথিবীপৃষ্ঠে λ দ্রাঘিমায় O বিন্দুতে Ox, Oy এবং Oz অক্ষরেখা পূর্ব, উত্তর এবং খাড়া উপরের দিকে নেয়া হল। দেখাও যে O বিন্দুর নিকটবর্তী একটি বস্তুকণার ত্বরণের উপাংশ হল

$$\ddot{x} + 2\omega\dot{z}\cos\lambda - 2\omega\dot{y}\sin\lambda$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x}\sin\lambda$$

$$\ddot{z} - 2\omega\dot{x}\cos\lambda$$

যেখানে পৃথিবীর কৌণিক বেগ ω এর বর্গ বাদ দেয়া হয়েছে। এই বিন্দুতে একটি ট্রেন সরলরেখায় সমান্তরাল কোন দিকে গতিশীল এবং তার সুষম গতিবেগ হল **V**। ট্রেনের কামরার ভিতরে মহাকর্ষ ত্বরণের মান নির্ণয় কর এবং দেখাও যে উল্লম্বের সঙ্গে প্লাম্ব-রেখা $2\omega V \sin\lambda/g$ কোণ সৃষ্টি করবে।

৬। ১ নং উদাহরণে যখন $\omega = 0$ তখন নিক্ষিপ্ত বস্তুর বিস্তার (range) যদি R হয় তবে দেখাও যে পৃথিবীর ঘূর্ণনের জন্য বিস্তারের পরিবর্তন হল

$$\Delta R = \sqrt{\frac{2R^3}{g}}\ \omega\cos\lambda\ (\cot^{\frac{1}{2}}\alpha - \tfrac{1}{3}\tan^{\frac{3}{2}}\alpha)$$

৭। পৃথিবীর মাধ্যাকর্ষণ শক্তির প্রভাবে মুক্ত পতনশীল বস্তুর করিওলিস বলের জন্যে সমান্তরাল দিকে বিচ্যুতি

$$d = \tfrac{1}{3}\omega\cos\lambda\ \sqrt{8h^3/g}$$

কেন্দ্রীয় বলের অধীনে গতিতত্ত্ব ব্যবহার করে প্রমাণ কর এবং দ্বিতীয় আসন্নমানে দেখাও যে দক্ষিণ দিকে বিচ্যুতির পরিমাণ

$$d_S = \tfrac{3}{2}\frac{h^2\omega^2}{g}\sin\lambda\cos\lambda$$

একটি সুষম, ঘন a ব্যাসার্ধের গোলক অপর একটি b ব্যাসার্ধের গোলকের অমসৃণ পৃষ্ঠতলে ঘোরে। গতিসমীকরণ নির্ধারণ কর এবং দেখাও যে ঘূর্ণমান গোলকটি স্থির গোলকের উচ্চতম বিন্দুর সংস্পর্শে স্থিতিশীলভাবে ঘুরতে পারে, যদি তার ঘূর্ণন $[\,35\,(a+b)/a^2\,]^{1/2}$ এর বেশি হয়।

ষষ্ঠ অধ্যায়

দৃঢ়বস্তুর গতিবিজ্ঞান

দৃঢ়বস্তুর গতি দুটি স্বতন্ত্র গতির যোগফল — একটি রৈখিক সরণ এবং অন্যটি কোন অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণন। সরণ গতিসম্পন্ন হলে বস্তুর ভরকেন্দ্র গতিশীল থাকে। সেক্ষেত্রে দৃঢ়বস্তুর কৌণিক ভরবেগ এবং গতিশক্তির দুটি অংশ থাকে— একটি অংশ ভরকেন্দ্রজনিত এবং অন্যটি ভরকেন্দ্রের গতিজনিত।

স্পষ্টতই বিভবশক্তিও যদি একইভাবে দু'ভাগ করা যায় তাহলে লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষকেও দুটি অংশ থাকবে--একটা সরণজনিত এবং অন্যটি ঘূর্ণনজনিত। কিন্তু দৃঢ়বস্তুর যদি কোন স্থির বিন্দু থাকে তাহলে অয়লারের উপপাদ্য অনুসারে দৃঢ়বস্তুর সাধারণ গতি হল কোন অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণন।

৬.১ জড়-টেন্সর

একটি দৃঢ়বস্তু নেয়া যাক যা m^α ভরবিশিষ্ট N বস্তুকণার সমষ্টি ($\alpha = 1, 2, \cdots, N$)। বস্তুর সঙ্গে একটি স্থানাঙ্ক সংযুক্ত করা যায়। ধরা যাক বস্তুর স্থির বিন্দুর মধ্য দিয়ে যাওয়া কোন অক্ষের চারদিকে তাৎক্ষণিক কৌণিক গতিবেগ হল $\underline{\omega}$। স্থির বিন্দুটি কোন মহাকাশে স্থির স্থানাঙ্কের পরিপ্রেক্ষিতে $\underline{V}$ তাৎক্ষণিক রৈখিক গতিতে চলমান। সুতরাং যে কোন α বস্তুকণার গতিবেগ ঐ স্থির স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে লেখা যায়,

$$\underline{v}_S^\alpha = \underline{V} + \underline{v}_{S'}^\alpha + \underline{\omega} \times \underline{r}^\alpha$$

যেখানে S এবং S´ দিয়ে স্থির এবং ঘূর্ণায়মান স্থানাঙ্ক নির্দেশ করা হয়েছে। কিন্তু যেহেতু ঘূর্ণায়মান স্থানাঙ্ক বস্তুর সঙ্গে সংযুক্ত এবং বস্তুর নিজস্ব স্থানাঙ্কের পরিপ্রেক্ষিতে তার কোন রৈখিক গতিবেগ থাকতে পারে না, তাই $\underline{v}_{S'} = 0$ এবং

$$\underline{v}_S^\alpha = \underline{V} + \underline{\omega} \times \underline{r}^\alpha \qquad (৬.১)$$

যেহেতু এখন থেকে গতিবেগ মহাকাশে স্থির স্থানাঙ্কের পরিপ্রেক্ষিতে নেয়া হবে তাই এরপর থেকে S সূচক আর লেখা হবে না।

বস্তুর গতিশক্তি হল

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha \underline{V}_\alpha^2 = \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha (\underline{V} + \underline{\omega}\times \underline{r}_\alpha)^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha \underline{V}^2 + \sum_{\alpha} m_\alpha \underline{V}\cdot(\underline{\omega}\times \underline{r}_\alpha) + \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha (\underline{\omega}\times \underline{r}_\alpha)^2$$

এটি সাধারণভাবে সত্য। কিন্তু এখন যদি স্থানাঙ্কের মূলবিন্দু বস্তুর ভরকেন্দ্রে নেয়া যায় তাহলে

$$\sum_{\alpha} m_\alpha \underline{V}\cdot(\underline{\omega}\times \underline{r}_\alpha) = \underline{V}\cdot\underline{\omega}\times\left(\sum_{\alpha} m_\alpha \underline{r}_\alpha\right)$$

$$= \underline{V}\cdot\underline{\omega}\times M\underline{R}$$

যেখানে M হল সামগ্রিক ভর $M = m_1 + \ldots + m_N$ এবং $\underline{R}$ হল ভরকেন্দ্রের অবস্থান। যেহেতু মূলবিন্দু এখন ভরকেন্দ্রে তাই $\underline{R} = 0$। সুতরাং

$$T = T_{tr} + T_{xot}$$

যেখানে T_{tr} হল গতিশক্তির সরণজনিত অংশ

$$T_{tr} = \tfrac{1}{2} M \underline{V}^2$$

এবং ঘূর্ণনজনিত অংশ হল,

$$T_{xot} = \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha \left(\underline{\omega}\times \underline{r}_\alpha\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha \left[\omega^2 r_\alpha^2 - \left(\underline{\omega}\cdot\underline{r}_\alpha\right)^2\right] \qquad (৬.২)$$

কেননা $(\underline{\omega}\times\underline{r})\cdot(\underline{\omega}\times\underline{r}) = \omega^2 r^2 - (\omega\cdot r)^2$। কিন্তু $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$ যেখানে ω_i হল $\underline{\omega}$ সদিক রাশির উপাংশ। সুতরাং

$$\omega^2 \underline{r}^2 - (\underline{\omega}\cdot\underline{r})^2 = \left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2\right)(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$- (\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z)^2$$

$$= \left(\sum_j \omega_j^2\right)\left(\sum_k r_k^2\right) - \left(\sum_j \omega_j r_j\right)\left(\sum_j \omega_k r_k\right)$$

যেখানে $r_1 = x$ ইত্যাদি। কিন্তু

$$\sum_j \omega_j^2 = \sum_j \sum_k \omega_j \omega_k \delta_{jk}$$

যেখানে δ_{jk} হল ক্রোনেকার ডেল্টা,

$$\delta_{jk} = 1 \qquad \hat{j} = k$$

$$= 0 \qquad \hat{j} \neq k$$

সুতরাং (৬.২) সমীকরণ থেকে

$$T_{rot} = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} m_\alpha \left[\omega_i \omega_j \delta_{ij} \left(\sum_k r_{\alpha,k}^2 \right) - \omega_i \omega_j r_{\alpha,i} r_{\alpha,j} \right]$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_j \omega_i \omega_j \sum_\alpha m_\alpha \left[\delta_{ij} \sum_k r_{\alpha,k}^2 - r_{\alpha,i} r_{\alpha,j} \right]$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_j \omega_i \omega_j I_{ij} \qquad (৬.৩)$$

যেখানে

$$I_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[\delta_{ij} \sum_{k=1}^{3} r_{\alpha,k}^2 - r_{\alpha,i} r_{\alpha,j} \right] \qquad (৬.৪)$$

হল বস্তুর জড়-টেন্সর। যেহেতু i, j, k সূচকের মান ১, ২, ৩ তাই বিস্তৃতভাবে লেখা যায়, উদাহরণস্বরূপ,

$$I_{11} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\left(r_{\alpha,1}^2 + r_{\alpha,2}^2 + r_{\alpha,3}^2 \right) - r_{\alpha,4}^2 \right] = \sum_\alpha m_\alpha \left(y_\alpha^2 + z_\alpha^2 \right)$$

$$I_{12} = -\sum_\alpha m_\alpha r_{\alpha,1} r_{\alpha,2} = -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha y_\alpha \qquad \text{ইত্যাদি।}$$

মেট্রিক্স আকারে লেখা যায়,

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} \Sigma m (y^2 + z^2) & -\Sigma m xy & -\Sigma m xz \\ -\Sigma m yx & \Sigma m (x^2 + z^2) & -\Sigma m yz \\ -\Sigma m zx & -\Sigma m zy & \Sigma m (x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

যেখানে α উহ্য রাখা হয়েছে। এই টেন্সরটি প্রতিসাম্যযুক্ত,

$$I_{ij} = I_{ji}$$

সুতরাং তার ছয়টি স্বতন্ত্র অংশ আছে। মেট্রিক্সের কর্ণ বরাবর উপাদানগুলি I_{11}, I_{22} এবং I_{33} যথাক্রমে x, y, z অক্ষের চারদিক জড়ত্বের মোমেন্ট (moment of inertia) এবং অন্য তিনটি I_{12}, I_{13}, I_{23}-কে জড়ত্বের গুণন (product of inertia) বলে। স্পষ্টতই জড়ত্ব টেন্সর যৌগিক অর্থাৎ কোন বস্তুর জড়ত্বের মোমেন্ট তার অংশের জড়ত্বের মোমেন্টের যোগফল।

দৃঢ়বস্তুকে অবিচ্ছিন্নভাবে পদার্থের বিন্যাস বলে চিন্তা করলে আমরা লিখতে পারি,

$$I_{ij} = \int \rho(r)\, dv\, [\delta_{ij} \sum_k r_k^2 - r_i r_j] \qquad (৬.৫)$$

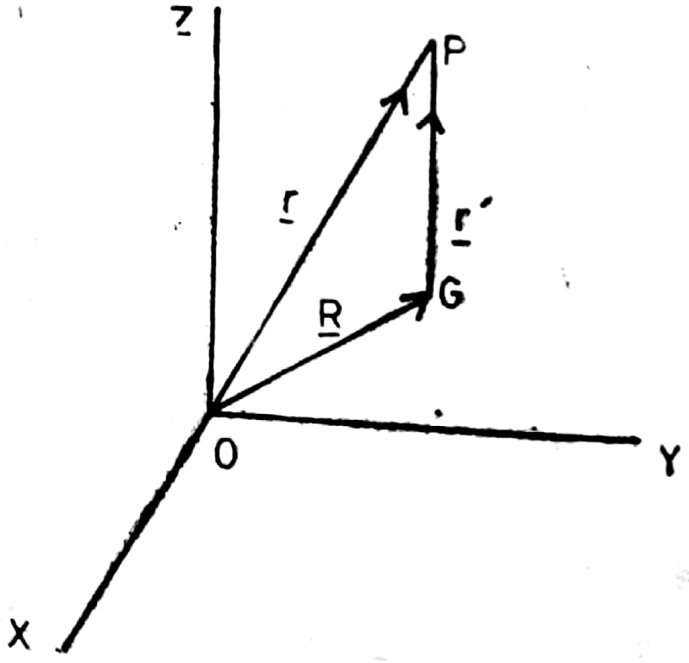
যেখানে $\rho(r)$ হল r বিন্দুতে বস্তুর ঘনত্ব।

৬.২ জড়ত্বের মোমেন্ট সংক্রান্ত দুটি উপপাদ্য

জড়ত্বের মোমেন্ট সংক্রান্ত দুটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য আছে :

(১) সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য

এই উপপাদ্য অনুসারে, দৃঢ়বস্তুর কোন অক্ষের চারপাশে জড়ত্বের মোমেন্ট ভরকেন্দ্রগামী আর একটি অক্ষের চারপাশে জড়ত্বের মোমেন্ট এবং সমগ্র ভর



চিত্র : ৬.১

ভরকেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত হলে সেই ভরের নির্দিষ্ট অক্ষের চারপাশে জড়ত্বের মোমেন্টের যোগফলের সমান।

প্রমাণ করার জন্য ধরা যাক O মূলবিন্দু দিয়ে যাওয়া Z-অক্ষরেখার চারপাশে জড়ত্বের মোমেন্ট I_O এবং ভরকেন্দ্র G দিয়ে যাওয়া একটি সমান্তরাল অক্ষের চারপাশে জড়ত্বের মোমেন্ট হল I_G। যেহেতু $\underline{r} = \underline{R} + \underline{r}'$, এবং $\underline{R}$ সদিক রাশির উপাংশ হল X, Y, Z তাই

$$x^2 + y^2 = (x' + X)^2 + (y' + Z)^2$$
$$= (x'^2 + y'^2) + (X^2 + Y^2) + 2(Xx' + Yy')$$

সুতরাং

$$I_O = I_{33}$$
$$= \int (x^2 + y^2)\, \rho dv = I_G + M(X^2 + Y^2)$$

যেখানে $I_G = \int (x'^2 + y'^2)\, \rho\, dv$

এবং $M = \int \rho dv$

এখানে অন্য দুটি সমাকলন

$$\int x' \rho dv \qquad \int y' \rho dv$$

শূন্য কেননা তারা G বিন্দুর সাপেক্ষে ভরকেন্দ্রের x এবং y অক্ষাংশ দেয় এবং G বিন্দুই মূলবিন্দু বলে তাদের মান শূন্য। এভাবেই উপপাদ্য প্রমাণিত হয়।

(২) লম্ব অক্ষের উপপাদ্য

এই উপপাদ্য অনুসারে যে কোন সমতলীয় বস্তুর সমতলের উপরে দুটি পারস্পরিক লম্ব অক্ষের চারপাশে জড়ত্বের মোমেন্টের যোগফল ঐ দুটি অক্ষের ছেদবিন্দুতে তলের উপর উল্লম্ব অক্ষের জড়ত্বের মোমেন্টের সমান।

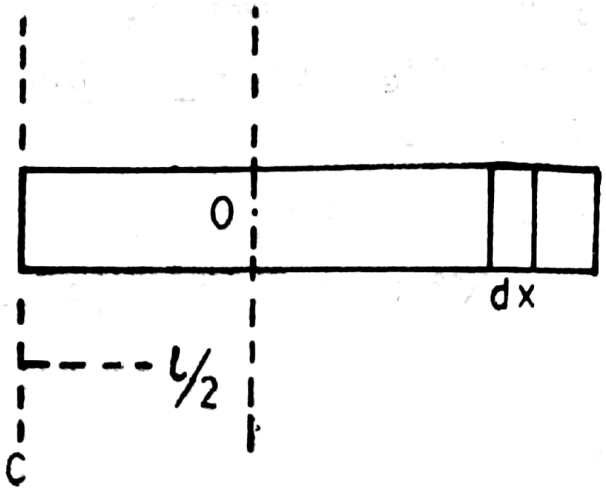
প্রমাণের জন্যে ধরা যাক xy তলে m ভরবিশিষ্ট বস্তুকণার অক্ষাংশ x এবং y। সুতরাং x ও y অক্ষের চারপাশে জড়ত্বের মোমেন্ট হল,

$$\left.\begin{aligned} I_x &= m y^2 \qquad I_y = m x^2 \\ \text{সুতরাং} \quad I_x + I_y &= m(y^2 + x^2) = I_z \end{aligned}\right\} \qquad (৬.৬)$$

যেহেতু এটি যে কোন বস্তুকণার জন্য সঠিক তাই সব বস্তুকণার উপরে যোগ করে আমরা উপপাদ্যের সত্যতা প্রমাণ করতে পারি।

উদাহরণ ১

একটি সুষম দণ্ডের মধ্যবিন্দু O দিয়ে যাওয়া এবং তার দৈর্ঘ্যের উপর উল্লম্ব অক্ষের চারপাশে জড়ত্বের মোমেন্ট



চিত্র : ৬.২

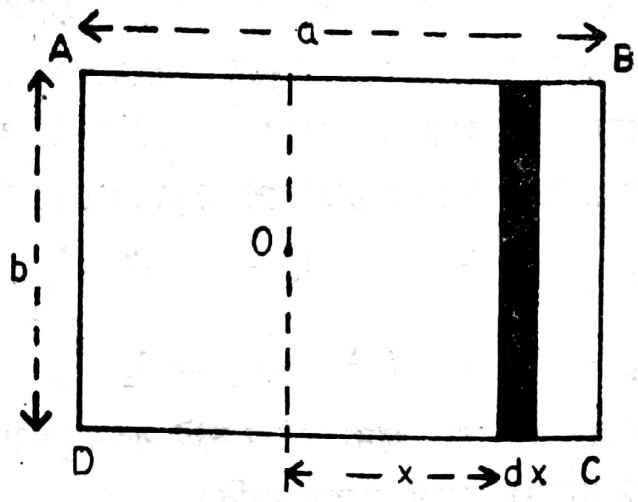
$$I_o = 2\int_0^{1/2} \left(\frac{M}{l}\right) x^2\, dx = \frac{Ml^2}{12}$$

সুতরাং সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য অনুসারে,

$$I_c = I_o + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{3}$$

উদাহরণ ২ ঃ আয়তাকার বস্তুর জড়ত্বের মোমেন্ট

কেন্দ্র দিয়ে যাওয়া এবং একটি বাহুর সমান্তরাল অক্ষের চারপাশে জড়ত্বের মোমেন্ট



চিত্র : ৬.৩

$$I_O = 2\int_0^{a/2} \frac{M}{ab}(b\,dx)\,x^2 = \frac{Ma^2}{12}$$

সুতরাং

$$I_y = I_{AD} = \frac{Ma^2}{12} + M\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{Ma^2}{3}$$

$$I_x = I_{AB} = \frac{Mb^2}{3}$$

এবং লম্ব-অক্ষের উপপাদ্য অনুসারে

$$I_{OZ} = I_x + I_y = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$$

উদাহরণ ৩

(ক) একটি পাতলা বৃত্তাকার আংটির কেন্দ্র দিয়ে যাওয়া এবং তার তলের উপর লম্ব অক্ষের চারপাশে জড়ত্বের মোমেন্ট হল,

$$I_Z = \sum_i m_i a^2 = Ma^2$$

যেখানে a বৃত্তের ব্যাসার্ধ। সুতরাং বৃত্তের ব্যাসের চারপাশে জড়ত্বের মোমেন্ট হল

$$I_x = I_y = \tfrac{1}{2}Ma^2$$

(খ) বৃত্তের স্পর্শকের চারপাশে জড়ত্বের মোমেন্ট

$$I_T = \tfrac{1}{2}Ma^2 + Ma^2 = \tfrac{3}{2}Ma^2$$

(গ) বৃত্তাকার সরার কেন্দ্র দিয়ে যাওয়া এবং তার তলের উপর লম্ব অক্ষের চারপাশে জড়ত্বের মোমেন্ট হল

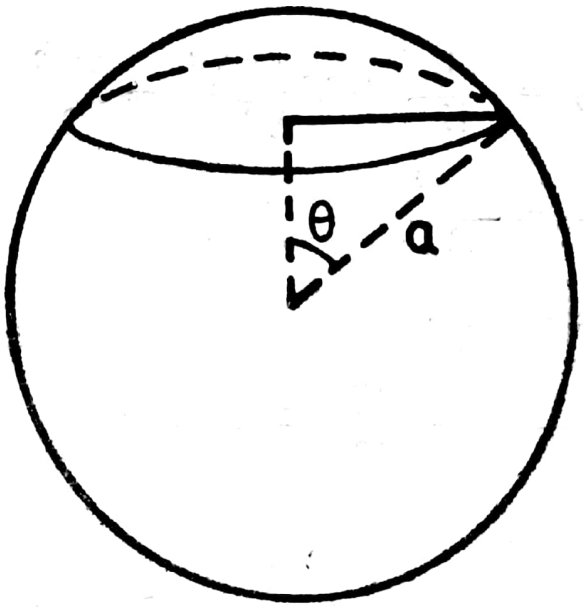
$$I_z = \int_0^a \rho\,(2\pi r dr)\,r^2 = \frac{M}{2}a^2$$

কেননা ভর $M = \pi a^2 \rho$। সুতরাং সরার ব্যাসের চারদিকে জড়ত্বের মোমেন্ট

$$I_x = I_y = \frac{M}{4}a^2$$

(ঘ) একটি বর্তুলাকার নিরেট বস্তুর ব্যাসের চারপাশে জড়ত্বের মোমেন্ট হল

$$I_z = \int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}\pi (a \sin\theta)^2 \rho (a \sin\theta)^2 d(a \cos\theta)$$



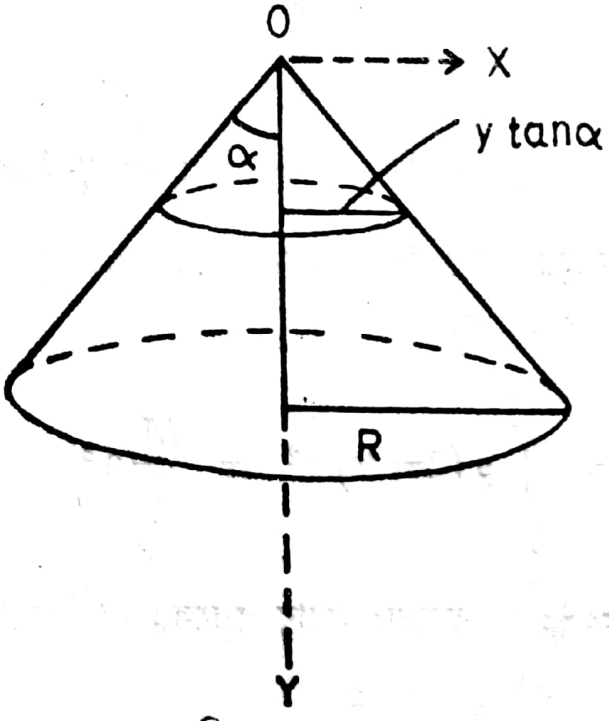
চিত্র ঃ ৬.৪

এখানে বৃত্তাকার সরার সমীকরণ ব্যবহার করা হয়েছে। সমাকলন করে

$$I_z = \tfrac{2}{5} Ma^2$$

কেননা বর্তুলের ভর হল $M = \tfrac{4}{3}\pi a^3 \rho$ ।

উদাহরণ ৪



চিত্র ঃ ৬.৫

সবশেষে ঘন শঙ্কুর উল্লম্ব অক্ষের চারপাশে জড়ত্বের মোমেন্ট হল

$$I_{OY} = \int_0^h [\rho \pi y \tan\alpha \, dy] \tfrac{1}{2}(y \tan\alpha)^2$$

সমাকলন করে

$$I_{OY} = \tfrac{3}{10} MR^2$$

৬.৩ দৃঢ়বস্তুর কৌণিক ভরবেগ

কৌণিক ভরবেগের সংজ্ঞা হল $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$ । সুতরাং বস্তু-সংলগ্ন স্থানাঙ্কের মূলবিন্দু O-এর সাপেক্ষে,

$$\underline{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} \underline{r}_\alpha \times \underline{p}_\alpha$$

যেখানে ঐ একই স্থানাঙ্কের পরিপ্রেক্ষিতে রৈখিক ভরবেগ হল,

$$\underline{p}_\alpha = m_\alpha \underline{V}_\alpha = m_\alpha \underline{\omega} \times \underline{r}_\alpha$$

সুতরাং

$$\underline{L} = \sum_\alpha m_\alpha \underline{r}_\alpha \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_\alpha)$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \left[r_\alpha^2 \underline{\omega} - (\underline{\omega} \cdot \underline{r}_\alpha) \underline{r}_\alpha \right]$$

উপাংশে ভাগ করে,

$$L_i = \sum_\alpha m_\alpha \left[\omega_i \sum_k r_{\alpha,k}^2 - r_{\alpha,i} \sum \omega_j r_{\alpha j} \right]$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \sum_{j=1}^{3} \left[\omega_j \delta_{ij} \sum_k r_{\alpha,k}^2 - \omega_j r_{\alpha,i} \, r_{\alpha,j} \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \omega_j I_{ij} \qquad (৬.৭)$$

যেখানে I_{ij} হল জড়ত্বের টেন্সর। যেহেতু

$$\tfrac{1}{2}\sum_i \omega_i L_i = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} \omega_i \omega_j I_{ij} = T_{rot}$$

সুতরাং ঘূর্ণন শক্তি হল,

$$T_{rot} = \tfrac{1}{2}\,\underline{\omega}\cdot\underline{L} \qquad (৬.৮)$$

৬.৪ প্রধান অক্ষ রূপান্তর

জড়ত্ব টেন্সর I_{ij} একটি দ্বিতীয়-পর্যায়ের প্রতিসম টেন্সর যার ছয়টি স্বতন্ত্র উপাদান আছে। দৃঢ়বস্তুর জন্য তার কর্ণ-উপাদানগুলি হল

$$I_{11} = \int \rho\,(z^2 + y^2)\,dv \qquad I_{22} = \int \rho\,(z^2 + x^2)\,dv$$

$$I_{33} = \int \rho\,(x^2 + y^2)\,dv$$

এবং কর্ণের দুপাশের উপাংশগুলি হল

$$I_{12} = \int \rho xy\,dv \quad I_{23} = \int \rho yz\,dv \quad I_{31} = \int \rho zx\,dv$$

এদের যথাক্রমে জড়ত্বের মোমেন্ট এবং জড়ত্বের গুণন বলে।

টেন্সরের সাধারণ তত্ত্ব থেকে আমরা জানি যে স্থানাঙ্ক-অক্ষরেখাকে এমন-ভাবে বিন্যাস করা যায় যাতে জড়ত্বের টেন্সরটি পুরোপুরি কর্ণায়িত টেন্সর হয়ে যায়। অর্থাৎ ছয়টি অংশের বদলে শুধু কর্ণ বরাবর উপাংশগুলি থাকে। এই ৩টি কর্ণ উপাংশকে বলে প্রধান জড়তার মোমেন্ট। এ ধরনের স্থানাঙ্ক রূপান্তরকে প্রধান অক্ষ রূপান্তর বলে এবং সেক্ষেত্রে টেন্সরটিকে কর্ণায়িত করা হয়েছে বলা হয়।

এই উদ্দেশ্যে আমরা দৃঢ়বস্তুর কৌণিক ভরবেগের (৬.৭) সমীকরণ নিতে পারি,

$$\underline{L} = J\,\underline{\omega} \qquad (৬.৯)$$

যেখানে $\underline{L}$ একটি স্তম্ভ সদিক রাশি

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \qquad \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

এবং J জড়ত্বের টেন্সর,

$$J = \begin{pmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ & \cdots & \cdots \\ & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

সাধারণত $\underline{L}$ এবং $\underline{\omega}$ এই দুই সদিক রাশির দিক একই হয় না। সুতরাং J রাশিকে একটি কারক হিসেবে চিন্তা করা যায় যার প্রয়োগের ফলে $\underline{\omega}$ সদিক রাশি সম্পূর্ণ নতুন একটি সদিক রাশি $\underline{L}$-এ পর্যবসিত হয়। এখন প্রশ্ন হল এক বা একাধিক $\underline{\omega}$ থাকা সম্ভব কিনা যা দিয়ে একই নির্দিষ্ট J রেখে বিভিন্ন $\underline{L}$ সদিক রাশি তৈরি করা যায় যার দিক $\underline{\omega}$ সদিক রাশির দিকেই। সম্ভব হলে $\underline{L}$ এবং $\underline{\omega}$ সদিক রাশির সম্পর্ক হবে,

$$\underline{L} = n\,\underline{\omega}$$

যেখানে n একটি নিদিক গুণিতক। মেট্রিক্সের ভাষায়

$$\underline{L} = nI\,\underline{\omega} \qquad (৬.১০)$$

যেখানে $\underline{L}$ এবং $\underline{\omega}$ স্তম্ভ মেট্রিক্স এবং I একটি ৩ × ৩ মাত্রার একক মেট্রিক্স যার কর্ণের উপাংশ ১ এবং কর্ণ ব্যতিরেকে উপাংশগুলি শূন্য। সুতরাং (৬.৯) এবং (৬.১০) সমীকরণ থেকে লেখা যায়,

$$(J - nI)\,\underline{\omega} = 0 \qquad (৬.১১)$$

উপাংশে ভাগ করে তিনটি সমীকরণ হল,

$$\begin{aligned} (I_{11} - n)\,\omega_1 - I_{12}\,\omega_2 - I_{13}\,\omega_3 &= 0 \\ -I_{21}\,\omega_1 + (I_{22} - n)\,\omega_2 - I_{23}\,\omega_3 &= 0 \\ -I_{31}\,\omega_1 - I_{32}\,\omega_2 + (I_{33} - n)\,\omega_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (৬.১২)$$

যেখানে $I_{12} = I_{21}$ ইত্যাদি। এই তিনটি সমীকরণের সমাধান সম্ভব যখন ω_i-এর সহগগুলির নির্ণায়ক শূন্য হয়,

$$\det\,(J - nI) = 0 \qquad (৬.১৩)$$

লক্ষ্য করা দরকার যে (৬.১২) সমীকরণের যে কোন দুটি থেকে $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ এর মান পুরোপুরি নির্ণয় করা যায় না, কেবল তাদের অনুপাত নির্ধারণ করা যায়। সুতরাং যে দিকের জন্যে কৌণিক গতিবেগ $\underline{\omega}$ এবং কৌণিক ভরবেগ $\underline{L}$-এর দিক একই তা নির্ধারণ করা যায় (৬.১৩) সমীকরণের সমাধান থেকে n নির্ণয় করে এবং তারপর $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3$ অনুপাত নির্ধারণ করে। যদি তাৎক্ষণিক ঘূর্ণন-অক্ষ স্থিরবিন্দু O দিয়ে যায় এবং তা কৌণিক বেগ $\underline{\omega}$ নির্দিষ্ট করে এমনভাবে যে ঐ অক্ষ তাৎক্ষণিক কৌণিক ভরবেগ $\underline{L}$-এর সমান্তরাল তাহলে ঐ অক্ষকে বস্তুর প্রধান অক্ষ বলে। এক্ষেত্রে (৬.১৩) ত্রিঘাত সমীকরণ সমাধান করে n রাশির যে মান পাওয়া যায় তাকে ঐ অক্ষের দিকে বস্তুর প্রধান জড়ত্বের মোমেন্ট বলে। মেট্রিক্স বীজগণিতের ভাষায় (৬.১৩) সমীকরণের মূল-গুলিকে সঠিক মান বলে।

যেহেতু ত্রিঘাত সমীকরণের সহগগুলি সবই বাস্তব, মূলগুলির অন্তত একটি ধরা যাক $n = n_1$ বাস্তব। তার সংশ্লিষ্ট দিক ধরা যাক X-অক্ষ। সুতরাং $\omega_1 \neq 0$ এবং $\omega_2 = \omega_3 = 0$। অতএব $I_{21} = I_{31} = 0$ এবং $I_{11} = n_1$। সেক্ষেত্রে (৬.১৩) সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,

$$\begin{vmatrix} n_1 - n & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} - n & -I_{23} \\ 0 & -I_{23} & I_{33} - n \end{vmatrix} = 0$$

যেহেত $n \neq n_1$, তাই ত্রিঘাত সমীকরণের অন্য দুটি মূল হল

$$(I_{22} - n)(I_{33} - n) - I_{23}^2 = 0$$

এই দ্বিঘাত সমীকরণের নির্ণায়ক

$$(I_{22} - I_{33})^2 + 4I_{23}^2 \geq 0$$

সুতরাং অন্য দুটি মূলও বাস্তব এবং তারা সমান যদি $I_{22} = I_{33}$ এবং $I_{23} = 0$।

আবার ধরা যাক (৬.১২) সমীকরণ নিচের মান জোড়া সার্থক করে,

$$n = n_1, \quad \underline{\omega} = \underline{\omega}^{(1)} \quad \text{এবং} \quad n = n_2, \quad \underline{\omega} = \underline{\omega}^{(2)}$$

সুতরাং

$$J\,\underline{\omega}^{(1)} = n_1\,\underline{\omega}^{(1)} \qquad (৬.১৪)$$

$$J\,\underline{\omega}^{(2)} = n_2\,\underline{\omega}^{(2)} \qquad (৬.১৫)$$

যেখানে $\underline{\omega}^{(1)}$ এবং $\underline{\omega}^{(2)}$ দুটি স্তম্ভ সদিক রাশি এবং J হল জড়ত্বের টেন্সর। যদি $\underline{\omega}^{(1)T}$ এবং $\underline{\omega}^{(2)T}$ দিয়ে ঐ দুই সদিক রাশির সংশ্লিষ্ট সারি সদিক রাশি নির্দেশ করা হয়, তাহলে (৬.১৪) সমীকরণকে $\underline{\omega}^{(2)T}$ এবং (৬.১৫) সমীকরণকে $\underline{\omega}^{(1)T}$ দিয়ে গুণ করে আমরা পাই,

$$\underline{\omega}^{(2)T}\ \mathbf{J}\ \underline{\omega}^{(1)} = n_1\ \underline{\omega}^{(2)T}\ \underline{\omega}^{(1)}$$

$$\underline{\omega}^{(1)T}\ \mathbf{J}\underline{\omega}^{(2)} = n_2\ \underline{\omega}^{(1)T}\ \underline{\omega}^{(1)}$$

প্রথম সমীকরণটিকে 'পক্ষান্তরিত' (transpose) করে পাওয়া যায়

$$\underline{\omega}^{(1)T}\ \mathbf{J}\underline{\omega}^{(2)} = n_1\ \underline{\omega}^{(1)T}\ \underline{\omega}^{(2)}$$

কেননা J একটি প্রতিসম মেট্রিক্স। সুতরাং দ্বিতীয় সমীকরণ বিয়োগ করে

$$0 = (n_2 - n_1)\ \underline{\omega}^{(1)T}\ \underline{\omega}^{(2)}$$

যেহেতু এক্ষেত্রে $n_1 \neq n_2$, সুতরাং

$$\underline{\omega}^{(1)T}\ \underline{\omega}^{(2)} = 0$$

অর্থাৎ $\underline{\omega}^{(1)}$ এবং $\underline{\omega}^{(2)}$ সদিক রাশি দুটি পরস্পরের উপর লম্ব। অতএব যখন $n_1 \neq n_2$, প্রধান অক্ষগুলি পরস্পরের উপর লম্ব। কিন্তু যদি $n_1 = n_2 = n$ হয় তবে (৬.১৪) এবং (৬.১৫) সমীকরণ থেকে দুটিকে λ এবং μ দিয়ে গুণ করে আমরা পাই,

$$(\mathbf{J} - n\,\mathbf{I})\ (\lambda\ \underline{\omega}^{(1)} + \mu\ \underline{\omega}^{(2)}) = 0$$

অর্থাৎ যখন $n_1 = n_2$, তখন $\underline{\omega}^{(1)}$ এবং $\underline{\omega}^{(2)}$ সদিক রাশির তলে যে কোন অক্ষ হল প্রধান অক্ষ।

সাধারণভাবে বলা যায় যে যখন (৬.১১) সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব এবং পৃথক তখন তিনটি পরস্পর লম্ব প্রধান অক্ষ থাকবে যা দৃঢ়বস্তুর স্থির বিন্দু দিয়ে যায়। ধরা যাক (৬.১১) সমীকরণের মূলগুলি হল

$$n = n_k\quad \underline{\omega} = \underline{\omega}^{(k)} = \omega^{(k)}\ \hat{\underline{a}}_k \qquad k = 1,\ 2,\ 3$$

যেখানে $\hat{\underline{a}}_k$ সদিক রাশি তিনটি প্রধান অক্ষের দিকে তিনটি একক সদিক রাশি। যেহেতু $\hat{\underline{a}}_k$ একক সদিক রাশিগুলি পরস্পরের উপর লম্ব তাই $\hat{\underline{a}}_1$, $\hat{\underline{a}}_2$,

$\hat{\underline{a}}_3$ আমরা ডান-হাতি স্ক্রু-গতির নিয়ম অনুসারে নিতে পারি। এই তিনটি একক সদিক রাশি দিয়ে স্থাপিত স্থানাঙ্কে অবস্থান সদিক রাশি হল,

$$r = r_1 \hat{\underline{a}}_1 + r_2 \hat{\underline{a}}_2 + r_3 \hat{\underline{a}}_3 = \hat{\underline{i}}\, x + \hat{\underline{j}}\, y + \hat{\underline{k}}\, z$$

প্রধান অক্ষের চারপাশে ঘূর্ণনের জন্য আমাদের কৌণিক ভরবেগের সমীকরণ $\underline{L} = n\,\underline{\omega}$-কে লেখা যায়

$$\Sigma m\, \underline{r} \times (\underline{\omega}^{(1)} \times \underline{r}) = n_1\, \underline{\omega}^{(1)} \qquad (৬.১৬)$$

এই সমীকরণকে $\hat{\underline{a}}_1$ দিয়ে নির্দিক গুণন করে এবং $\omega^{(1)}$ দিয়ে ভাগ করে,

$$n_1 = \Sigma m (\hat{\underline{a}}_1 \times \underline{r})^2$$

কেননা $\underline{\omega}^{(1)} = \hat{\underline{a}}_1^{(1)} \omega^{(1)}$ ।

যেহেতু $(\hat{\underline{a}}_1 \times \underline{r})_1 = r_2\, \hat{\underline{a}}_3 - r_3\, \hat{\underline{a}}_2$, সুতরাং

$$n_1 = \Sigma m (r_2^2 + r_3^2) = I_{11}^*$$

একইভাবে

$$n_2 = \Sigma m (r_3^2 + r_1^2) = I_{22}^*$$

$$n_3 = \Sigma m (r_1^2 + r_2^2) = I_{33}^*$$

এই তিনটি রাশি হল জড়ত্বের প্রধান মোমেন্ট। আবার উপরের (৬.১৬) সমীকরণের সদিক ত্রয়ী গুণনটি প্রসারিত করে লেখা যায়,

$$(\Sigma m r^2 - n_1)\, \underline{\omega}^{(1)} = \Sigma m (\underline{r} \cdot \underline{\omega}^{(1)})\, \underline{r}$$

অর্থাৎ

$$(\Sigma m r^2 - n_1)\, \hat{\underline{a}}_1^{(1)} = \Sigma m r_1\, \underline{r}$$

এই সমীকরণকে $\hat{\underline{a}}_2$ সদিক রাশি দিয়ে নির্দিক গুণন করে,

$$0 = \Sigma m r_1 r_2$$

একইভাবে

$$\Sigma m r_2 r_3 = \Sigma m r_3 r_1 = 0$$

অর্থাৎ প্রধান অক্ষের সাপেক্ষে জড়ত্বের গুণনগুলি শূন্য। সুতরাং স্থির বিন্দু দিয়ে গমনকারী প্রধান অক্ষের সাপেক্ষে জড়ত্বের মেট্রিক্স সহজভাবে লেখা যায়,

$$\begin{pmatrix} I_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & I_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & I_{33}^* \end{pmatrix}$$

প্রধান অক্ষের সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগের উপাংশগুলি হল

$$L_1 = I_{11}^* \omega^{(1)} \quad L_2 = I_{22}^* \omega^{(2)} \quad L_3 = I_{33}^* \omega^{(3)}$$

এবং সদিক রাশি হিসেবে কৌণিক ভরবেগকে লেখা যায়,

$$\underline{L} = I_{11}^* \underline{\omega}^{(1)} + I_{22}^* \underline{\omega}^{(2)} + I_{33}^* \underline{\omega}^{(3)}$$

যেখানে আর জড়ত্বের গুণনগুলি থাকে না।

৬.৫ দৃঢ়বস্তুর প্রধান অক্ষের সাপেক্ষে গতিশক্তি

ধরা যাক দৃঢ়বস্তুর স্থির বিন্দু O দিয়ে গমনকারী কোন অক্ষের চারদিকে তার তাৎক্ষণিক কৌণিক গতিবেগ হল $\underline{\omega}$। বস্তুর যে কোন বিন্দুর ভর m এবং মূলবিন্দু থেকে অবস্থান সদিক রাশি $\underline{r}$ হলে তার গতিশক্তি হল

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m \dot{r}^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma m (\underline{\omega} \times \underline{r})^2$$

কিন্তু $(\underline{\omega} \times \underline{r})^2 = (\underline{\omega} \times \underline{r}) \cdot (\underline{\omega} \times \underline{r}) = \underline{\omega} \cdot (\underline{r} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$

সুতরাং

$$T = \tfrac{1}{2}\underline{\omega} \cdot \Sigma \underline{r} \times m (\underline{\omega} \times \underline{r}) = \tfrac{1}{2}\underline{\omega} \cdot \underline{L}$$

কেননা কৌণিক ভরবেগ হল

$$L = \Sigma m r \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$$

এখন প্রধান অক্ষ তিনটির দিকে $\hat{\underline{a}}_1, \hat{\underline{a}}_2, \hat{\underline{a}}_3$ একক সদিক রাশি হলে লেখা যায়,

$$\underline{\omega} = \omega_1 \hat{\underline{a}}_1 + \omega_2 \hat{\underline{a}}_2 + \omega_3 \hat{\underline{a}}_3$$

এবং কৌণিক ভরবেগ

$$\underline{L} = I_{11}^* \omega_1 \hat{\underline{a}}_1 + I_{22}^* \omega_2 \hat{\underline{a}}_2 + I_3^* \omega_3 \hat{\underline{a}}_3$$

সুতরাং গতিশক্তি হল

$$T = \tfrac{1}{2}\,\underline{\omega}\cdot\underline{L} = \tfrac{1}{2}\left(I_{11}^{*}\omega_1^2 + I_{22}^{*}\omega_2^2 + I_{33}^{*}\omega_3^2\right)$$

ধরা যাক অন্য আর একটি স্থানাঙ্কের (মূলবিন্দু O একই) একক সদিক রাশি হল $\underline{\hat{i}}$, $\underline{\hat{j}}$, $\underline{\hat{k}}$ এবং এই স্থানাঙ্কে

$$\underline{r} = \underline{\hat{i}}\,x + \underline{\hat{j}}\,y + \underline{\hat{k}}\,z$$

$$\underline{\omega} = \omega\left(\underline{\hat{i}}\,l + \underline{\hat{j}}\,m + \underline{\hat{k}}\,n\right)$$

যেখানে (l, m, n) তাৎক্ষণিক ঘূর্ণন অক্ষের 'সদিক কোসাইন'।

সুতরাং

$$\underline{\omega}\wedge\underline{r} = \omega\left[\underline{i}\,(mz - ny) + \underline{j}\,(nx - lz) + \underline{k}\,(ly - mx)\right]$$

এবং $$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m\left(\underline{\omega}\times\underline{r}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\omega^2 I$$

যেখানে

$$I = I_{11}l^2 + I_{22}m^2 + I_{33}n^2 - 2I_{12}lm - 2I_{13}nl - 2I_{23}mn$$

এখানে $\underline{\hat{i}}$, $\underline{\hat{j}}$, $\underline{\hat{k}}$ স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে I_{11}, I_{22}, I_{33} জড়ত্বের মোমেন্ট এবং I_{12}, I_{13}, I_{23} জড়ত্বের গুণন। সুতরাং তুলনা করে বোঝা যায় যে, প্রধান অক্ষের ব্যবহার অনেক সহজ কেননা জড়ত্বের গুণন সেখানে থাকে না।

৬.৬ মোমেন্টের ঘনউপবৃত্তক

কোন দৃঢ়বস্তুর স্থির বিন্দু O দিয়ে গমনকারী তাৎক্ষণিক ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে তার জড়ত্বের মোমেন্ট হল

$$I = I_{11}l^2 + I_{22}m^2 + I_{32}n^2 - 2I_{12}lm - 2I_{13}nl - 2I_{23}mn$$

যেখানে (l, m, n) হল উক্ত ঘূর্ণন অক্ষের সদিক কোসাইন। এখন আমরা নিচের সমীকরণটি

$$I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 - 2I_{12}xy - 2I_{13}xz - 2I_{23}yz = Me^4 \qquad (৬.১৭)$$

বিবেচনা করতে পারি যেখানে M বস্তুর ভর এবং ϵ একটি ধ্রুবক যার মাত্রা দৈর্ঘ্যের, কেননা উভয় দিকের একই মাত্রা রাখা প্রয়োজন। ধরা যাক O বিন্দুর সাপেক্ষে তাৎক্ষণিক অক্ষের উপরে P বিন্দুর দূরত্ব R। সুতরাং $x = lR$, $y = mR$, $z = nR$ এবং তাই

$$I = M\epsilon^4 / R^2$$

অতএব সব (l, m, n) মানের জন্যেই R বাস্তব এবং সসীম কেননা $I > 0$। সুতরাং (৬.১৭) সমীকরণ একটি ঘনউপবৃত্তকের (ellipsoid) সমীকরণ যার কেন্দ্র হল O। এটিকেই O বিন্দুর মোমেন্টের ঘনউপবৃত্তক (momental ellipsoid) বলে

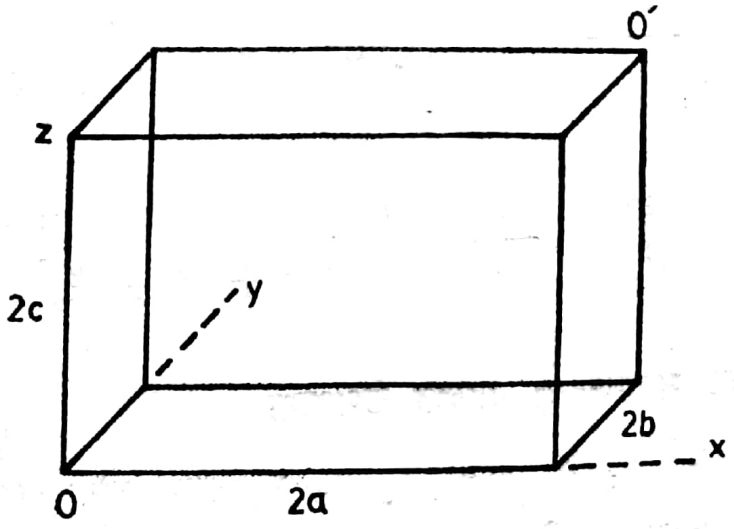
(৬.১৭) সমীকরণে প্রধান অক্ষের রূপান্তর করে লেখা যায়,

$$I^*_{11} x^2 + I^*_{22} y^2 + I^*_{33} z^2 = M\epsilon^4 \qquad (৬.১৮)$$

যেখানে I^*_{11}, I^*_{22}, I^*_{33} প্রধান জড়ত্বের মোমেন্ট। সুতরাং মোমেন্ট ঘন-উপবৃত্তকের তিনটি প্রধান অক্ষ জড়ত্বের প্রধান অক্ষের সঙ্গে একই হয়ে যায়।

উদাহরণ ৫

একটি ঘন সামন্তরিক বস্তুর ভর M এবং দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা হল $2a \times 2b \times 2c$। যে কোন কোনা O বিন্দুতে স্থানাঙ্ক নিয়ে মোমেন্টের ঘনউপবৃত্তক নির্ধারণ কর এবং OO′ রেখার চারপাশে জড়ত্বের মোমেন্ট নির্ণয় কর যেখানে O′ বিন্দু O বিন্দুর ঠিক বিপরীতে অবস্থিত।



চিত্র : ৬.৬

সমাধান : ঘন সামন্তরিকটির ধারগুলিতে x, y, z অক্ষ নিলে বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য হল 2a, 2b, 2c।

সুতরাং

$$I_{11} = \tfrac{1}{3} M (b^2 + c^2) + M (b^2 + c^2) = \tfrac{4}{3} M (b^2 + c^2)$$

$$I_{22} = \tfrac{4}{3} M (b^2 + a^2)$$

$$I_{33} = \tfrac{4}{3} M (a^2 + b^2)$$

আবার ρ যদি বস্তুর ঘনত্ব হয় তাহলে

$$I_{23} = \int_0^{2b} \int_0^{2c} \rho (2a \, dy \, dz) \, yz = M bc$$

একইভাবে

$$I_{31} = M ca$$

$$I_{12} = M ab$$

সুতরাং O বিন্দুতে মোমেন্টের ঘনউপবৃত্তকের সমীকরণ হল,

$$\tfrac{4}{3} M \{ (b^2 + c^2) x^2 + (c^2 + a^2) y^2 + (a^2 + b^2) z^2 \}$$

$$- 2M (bc\, yz + ca\, zx + ab\, xy) = M \epsilon^4$$

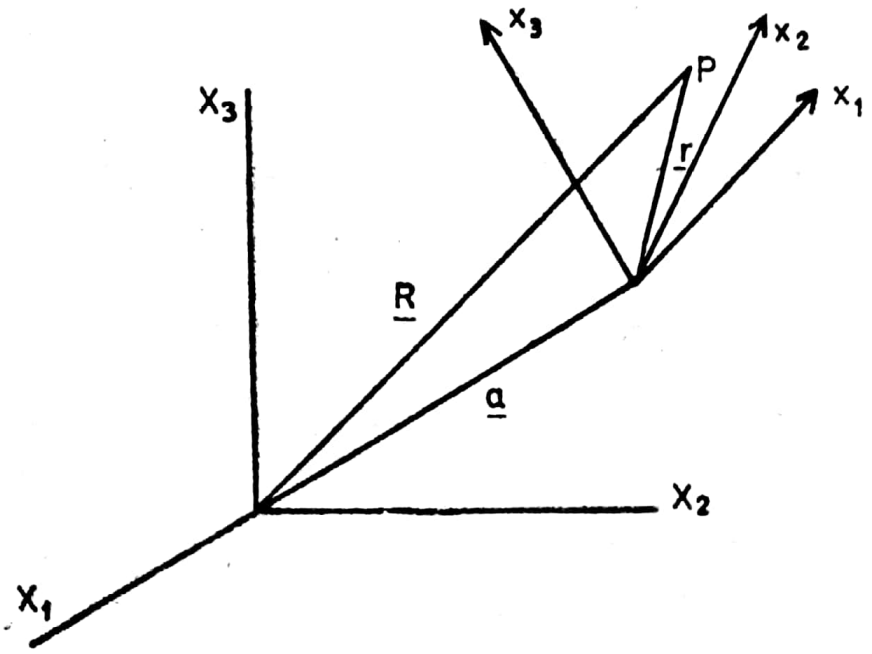
যেহেতু O′ বিন্দুর অক্ষাংশ হল (2a, 2b, 2c) তাই OO′ দূরত্ব

$R = 2\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$। সুতরাং OO′ সরলরেখার চারপাশে জড়ত্বের মোমেন্ট হল

$$I = \frac{M\epsilon^4}{R^2} = \frac{2}{3} \frac{M (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)}$$

৬.৭ সাধারণীকৃত সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য

দুটি স্থানাঙ্ক $X_1\ X_2\ X_3$ এবং $x_1\ x_2\ x_3$ নেয়া যাক যাদের মূলবিন্দু দুটি পরস্পর থেকে $\underline{a}$ দূরত্বে অবস্থিত। সুতরাং যে কোন বিন্দু P এর জন্যে লেখা যায়,



চিত্র ঃ ৬.৭

$$\underline{R} = \underline{a} + \underline{r}$$

X-স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে জড়ত্ব টেন্সরের অংশগুলি হল,

$$J_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_{k} X^2_{\alpha k} - X_{\alpha i} X_{\alpha j} \right]$$

যেখানে $X_{\alpha k}$ $(k = 1, 2, 3)$ হল α বস্তুকণার $\underline{R}$ সদিক রাশির উপাংশত্রয়।

সুতরাং

$$J_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_{k} \left(a_k + x_{\alpha k}\right)^2 - \left(a_i + x_{\alpha i}\right)\left(a_j + x_{\alpha j}\right) \right]$$

$$= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\left\{ \delta_{ij} \sum_{k} x^2_{\alpha k} - x_{\alpha i}\, x_{\alpha j} \right\} + \delta_{ij} \sum_{k} \left(2a_k\, x_{\alpha k} + a_k^2 \right) \right.$$

$$\left. - \left(a_i\, x_{\alpha i} + a_j\, x_{\alpha j} + a_i\, a_j \right) \right]$$

যেখানে $x_{\alpha k}$ হল α বস্তুকণার অবস্থান সদিক রাশি $\underline{r}$ এর উপাংশ। এই সমীকরণের প্রথম অংশ x-স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে জড়ত্বের টেন্সর,

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_{k} x_{\alpha k}^2 - x_{\alpha i} \, x_{\alpha j} \right]$$

সুতরাং

$$J_{ij} = I_{ij} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_{k} a_k^2 - a_i \, a_j \right]$$

$$+ \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[2\delta_{ij} \, a_k \, x_{\alpha k} - a_i \, x_{\alpha i} - a_j \, x_{\alpha j} \right]$$

শেষ অংশে আছে $\sum m_{\alpha} \, x_{\alpha k}$ কিন্তু x-স্থানাঙ্কের মূলবিন্দু হল বস্তুর ভরকেন্দ্র তাই এই রাশি শূন্য, কেননা এটি ভরকেন্দ্রের অক্ষাংশ। সুতরাং x-স্থানাঙ্কের মূলবিন্দু বস্তুর ভরকেন্দ্রে নিলে আমরা পাই,

$$J_{ij} = I_{ij} + M \left[\delta_{ij} \sum_{k} a_k^2 - a_i \, a_j \right] \qquad (৬.১৯)$$

এটিই সমান্তরাল অক্ষ উপপাদ্যের সাধারণীকৃত প্রকাশ। উদাহরণস্বরূপ,

$$J_{11} = I_{11} + M \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1^2 \right)$$

$$= I_{11} + M \left(a_2^2 + a_3^2 \right)$$

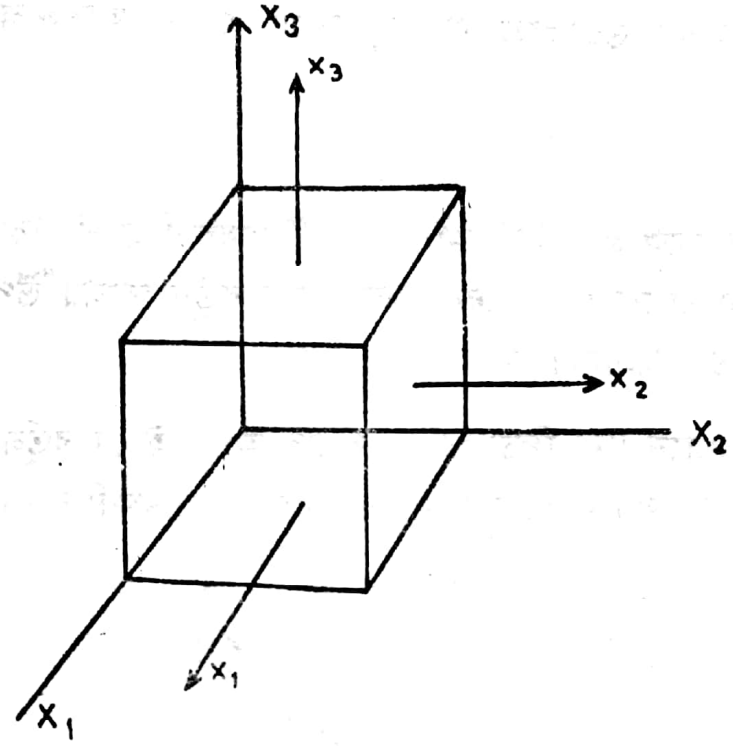
উদাহরণ ৬

একটি ঘনক (cube) নেয়া যায় যার বাহুর দৈর্ঘ্য b ।

সুতরাং

$$J_{11} = \int_0^b \rho \, p x_1 \, dx_2 \, dx_3 \, \left(x_2^2 + x_3^2 \right) = \tfrac{2}{3} \rho b^5 = \tfrac{2}{3} M b^2$$

$$J_{12} = - \int_0^b \rho \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \, x_1 \, x_2 = - \tfrac{1}{4} \rho b^5 = - \tfrac{1}{4} M b^2$$



চিত্র ঃ ৬.৮

সুতরাং প্রতিসাম্য অনুসারে লেখা যায়,

$$J_{ij} = Mb^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/3 \end{pmatrix}$$

ভরকেন্দ্রের অবস্থান হল

$$\underline{a} = \left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

অতএব $x_1\ x_2\ x_3$ স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে,

$$I_{11} = J_{11} - M\left(a_2^2 + a_3^2\right) = \frac{2}{3} Mb^2 - 2M \frac{b^2}{4} = \frac{1}{6} Mb^2$$

$$I_{12} = J_{12} - M\left(-a_1 a_2\right) = -\frac{1}{4} Mb^2 + M \frac{b^2}{4} = 0$$

সুতরাং x-স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে,

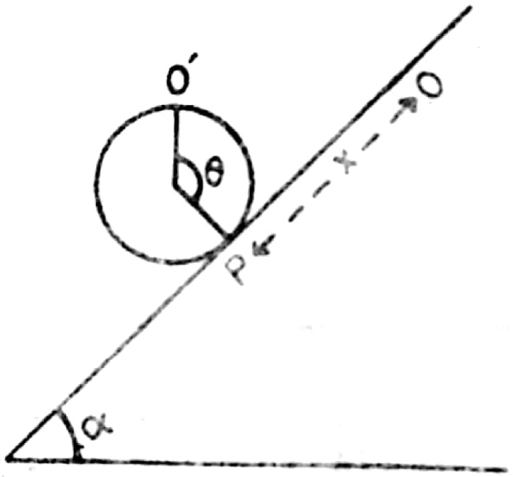
$$I_{ij} = Mb^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} Mb^2 \delta_{ij}$$

সুতরাং সুষম ঘনকের ভরকেন্দ্রে মূলবিন্দু নিলে প্রধান অক্ষগুলি তার পৃষ্ঠতলের উপর লম্ব।

উদাহরণ ৭

সমান্তরালের সঙ্গে α কোণে আনত একটি অমসৃণ তলে একটি m ভরবিশিষ্ট বর্তুল স্থির অবস্থা থেকে ছেড়ে দেয়া হল। যদি বর্তুল তলের উপর না পিছলায়, তাহলে তার গতি আলোচনা কর।

সমাধান : এখানে "না পিছলায়" এ কথার অর্থ এই যে বর্তুলটি তলের উপর ঘুরতে ঘুরতে নামে অর্থাৎ বর্তুলের সংযোগবিন্দু P তাৎক্ষণিকভাবে স্থির।



চিত্র ঃ ৬.৯

ধরা যাক প্রাথমিক সময়ে সংযোগবিন্দু তলের উপর O এবং বর্তুলের উপর O′। যদি $\angle PGO$ কোণকে θ এবং $OP = x$ লেখা হয় তাহলে $a\theta = x$, যেখানে a হল বর্তুলের ব্যাসার্ধ কেননা কোন পিছলানো ঘটে না। সুতরাং গতিশক্তি হল

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m a^2 \dot{\theta}^2$$

যেহেতু ব্যাসের চারদিকে বর্তুলের জড়ত্বের মোমেন্ট $\frac{2}{5} ma^2$ এবং $\dot{\theta}$ বর্তুলের কৌণিক গতিবেগ। এখন $x = a\dot{\theta}$ বসিয়ে,

$$T = \frac{7}{10} m \dot{x}^2$$

আবার যেহেতু বর্তুলের কেন্দ্র উল্লম্ব দিকে $x \sin \alpha$ দূরত্বে নেমে আসে তাই বিভব-শক্তির ক্ষয় হল $mgx \sin \alpha$। সুতরাং

$$\frac{7}{10} m \dot{x}^2 = mgx \sin \alpha$$

অথবা

$$\ddot{x} = \frac{5g \sin \alpha}{7}$$

অর্থাৎ বর্তুলের কেন্দ্র ধ্রুব ত্বরণ গতিতে নিচে নেমে আসে। যেহেতু $t = 0$ সময়ে $x = \dot{x} = 0$, তাই t সময়ে বর্তুলের অবস্থান হল

$$x = \frac{5}{14} g t^2 \sin \alpha$$

৬.৮ অয়লারের গতি সমীকরণ

দৃঢ়বস্তুর গতি আলোচনা করার জন্য আমরা সাধারণত বস্তুর কোন বিন্দুকে ঠিক করে নিয়ে তার সাপেক্ষে গতিকে দুভাগে ভাগ করি, একটি পুরোপুরি সরণ গতি এবং অন্যটা ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুর চারদিকে পুরোপুরি ঘূর্ণনগতি। যদি কোন প্রসঙ্গ কাঠামোয় বস্তুর কোন বিন্দু স্থির থাকে তবে সেই বিন্দুকেই নির্দিষ্ট বিন্দু ধরে নেয়া হয়।

বস্তুর সামগ্রিক শক্তি (এবং কৌণিক ভরবেগ)-কে দুভাগে ভাগ করা যায়— একটি অংশ ভরকেন্দ্রের সরণগতির জন্যে এবং অন্যটা ভরবেগের চারদিকে ঘূর্ণনের জন্যে। সুতরাং গতিশক্তি লেখা যায়,

$$T = \tfrac{1}{2} M V^2 + \tfrac{1}{2} I \omega^2$$

একইভাবে বিভবশক্তিকেও দুভাগ করা যায়।

সুতরাং লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষককে লেখা যায়,

$$L(q, \dot{q}) = L_c(q_c, \dot{q}_c) + L_b(q_b, \dot{q}_b)$$

যেখানে L_c অংশে ভরকেন্দ্রের সাধারণ অক্ষাংশ এবং গতিবেগ থাকে এবং L_b অংশে ভরবেগের চারদিকে গতির জন্য যথাযথ সাধারণ অক্ষাংশ ও গতিবেগ থাকে। ভরকেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরে প্রধান অক্ষ ব্যবহার করা সহজ এবং সেক্ষেত্রে গতিশক্তির প্রকাশ হল

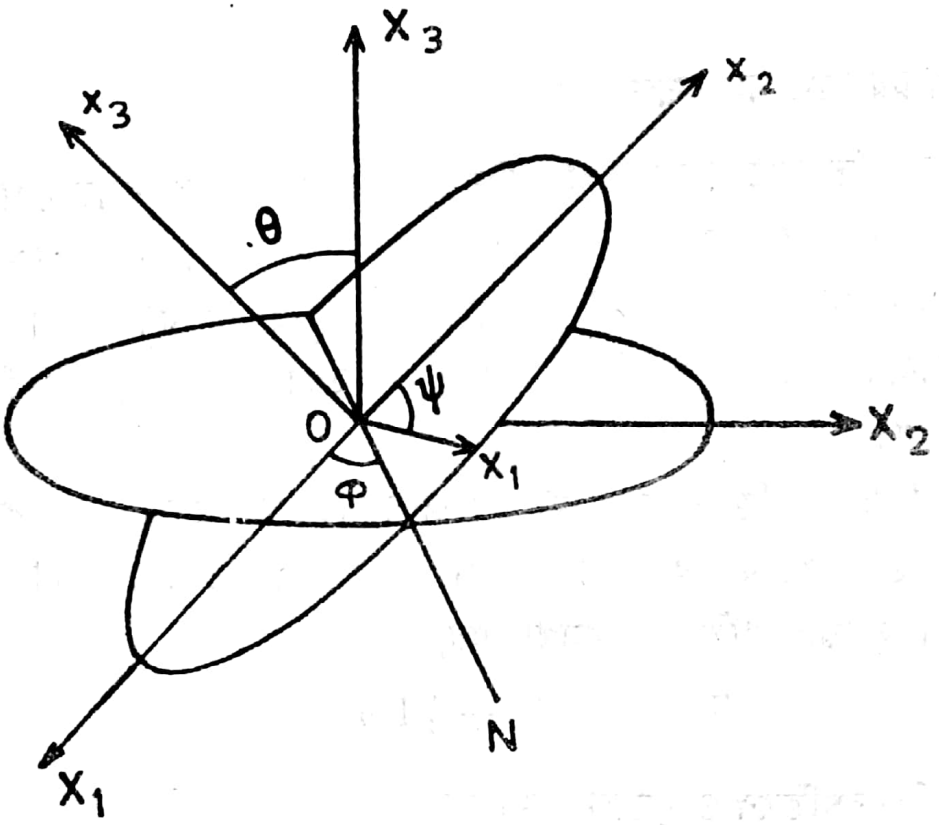
$$T = \tfrac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \tfrac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \tfrac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \qquad (৬.২০)$$

যেখানে I_i হল জড়ত্বের প্রধান মোমেন্ট এবং $\underline{\omega}$ কৌণিক বেগের সদিক রাশি।

এখন সাধারণ অক্ষাংশ হিসেবে অয়লার কোণ (φ, θ, ψ) ব্যবহার করে আমরা কৌণিক বেগের উপাংশগুলিকে লিখতে পারি,

$$\omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$$
$$\omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \qquad (৬.২১)$$
$$\omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi$$

যেখানে OX_3, ON এবং Ox_3 অক্ষরেখার দিকে তাৎক্ষণিক কৌণিক গতিবেগ যথাক্রমে $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ এবং $\dot{\psi}$ (চিত্র ৬.১০)।



চিত্র ঃ ৬.১০

সুতরাং ψ স্থানাঙ্কে গতিসমীকরণ হল

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0$$

যাকে লেখা যায়,

$$-\sum_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i}\frac{\partial \omega_i}{\partial \psi} + \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i}\frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\psi}}\right) = 0$$

কিন্তু

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \psi} = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi = \omega_2 \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \psi} = -\omega_1, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial \psi} = 0$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}} = 1 \qquad \frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\psi}} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_i} = I_i \omega_i$$

সুতরাং আমরা পাই,

$$\frac{d}{dt}(I_3 \omega_3) - I_1 \omega_1 \omega_2 + I_2 \omega_2 \omega_1 = 0$$

অর্থাৎ

$$I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2$$

একইভাবে

$$I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \qquad (৬.২২)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1$$

এই সমীকরণগুলির একটি বিকল্প নির্ধারণও প্রয়োজন। আমরা জানি যে সামগ্রিক কৌণিক ভরবেগ $\underline{L}$-এর সময় সাপেক্ষে অন্তরকলন বস্তুর কোন স্থিরবিন্দুর চারদিকে আরোপিত ব্যাবর্তন বলের সমান। সুতরাং

$$\left(\frac{d\underline{L}}{dt}\right)_S = \underline{N}$$

যেখানে S দিয়ে মহাকাশে স্থির স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা নির্দেশ করা হয়। এখন

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_S = \left(\frac{d}{dt}\right)_{S'} + \omega \times$$

যেখানে S´ বস্তুর সঙ্গে সংযুক্ত ঘূর্ণায়মান স্থানাঙ্ক বুঝায়। সুতরাং

$$\frac{d\underline{L}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{L} = \underline{N}$$

যেখানে S´ উহ্য রাখা হয়েছে অর্থাৎ এই সমীকরণ এখন বস্তুর সঙ্গে সংযুক্ত স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে লেখা হয়েছে। বস্তুর স্থির বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে তার সপেক্ষে প্রধান অক্ষরেখা স্থাপন করা যায় এবং সেই স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে

$$L_1 = I_1 \omega_1 \qquad L_2 = I_2 \omega_2 \qquad L_3 = I_3 \omega_3$$

যেখানে I_1, I_2 এবং I_3 প্রধান জড়ত্বের মোমেন্ট। অতএব

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2) &= N_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 (I_1 - I_3) &= N_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (I_2 - I_1) &= N_3 \end{aligned} \qquad (৬.২৩)$$

এই সমীকরণগুলিকে অয়লারের সমীকরণ বলে। স্পষ্টতই যদি আরোপিত ব্যাবর্তন শূন্য হয় তবে আমরা (৬.২২) সমীকরণ ফিরে পাই।

৬.৯ প্রতিসম বস্তুর মুক্তগতি

আমরা যদি একটি প্রতিসম দৃঢ়বস্তু নেই, যার প্রতিসাম্য অক্ষ z-অক্ষের দিকে, তাহলে $I_1 = I_2$ এবং I_3 বিভিন্ন। সুতরাং অয়লার সমীকরণ থেকে,

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_2 \omega_3 \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 \omega_1 \\ \dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (৬.২৪)$$

কেননা আরোপিত ব্যাবর্তন না থাকায় $\underline{N} = 0$। যেহেতু মুক্ত গতির জন্য ভরকেন্দ্র হয় স্থির অথবা রৈখিক সুষম গতিসম্পন্ন (নিউটনের আইন) তাই ভরকেন্দ্রকে স্থির নেয়া যায় এবং স্থানাঙ্কের মূলবিন্দু ভরকেন্দ্রে নেয়া যায়। অবশ্য কৌণিক বেগ ω বস্তুর প্রধান অক্ষের দিকে নয়।

এখন তৃতীয় সমীকরণ থেকে

$$\omega_3 = \text{ধ্রুব রাশি} = C$$

সুতরাং

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 &= 0 \\ \dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 &= 0 \end{aligned} \qquad (৬.২৫)$$

যেখানে

$$\Omega = C \frac{I_3 - I_1}{I_1}$$

এই সমীকরণ দুটিকে সমাধান করার জন্যে আমরা $z = \omega_1 + i\omega_2$ লিখি এবং পাই,

$$\dot{z} - i\Omega z = 0$$

যার সমাধান হল

$$z = A e^{i\Omega t}$$

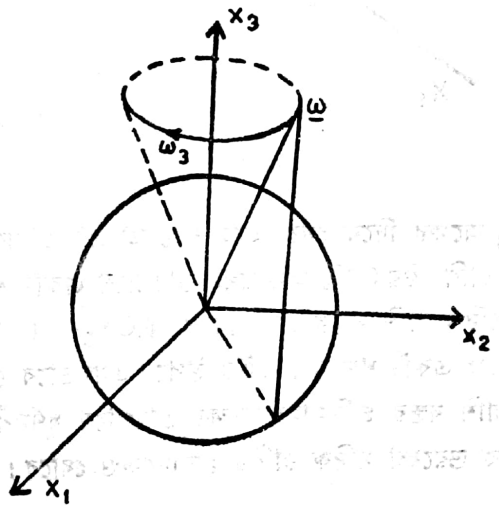
অর্থাৎ

$$\omega_1 = A \cos \Omega t \qquad \text{এবং} \qquad \omega_2 = A \sin \Omega t$$

সুতরাং

$$\omega = |\underline{\omega}| = \sqrt{A^2 + \omega_3^2} = \text{ধ্রুবক}$$

এখন $\omega_1^2 + \omega_2^2 = A^2$ সমীকরণটি একটি বৃত্তের সমীকরণ। সুতরাং $\underline{\omega}$ সদিক রাশির x_1 x_2 তলে অভিক্ষেপ একটি বৃত্ত।



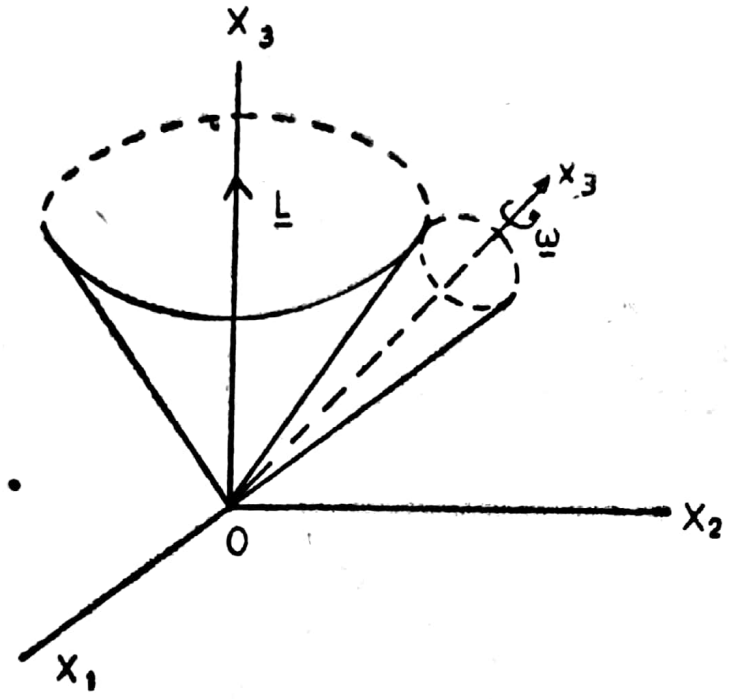
চিত্র ঃ ৬.১১

স্পষ্টতই ω সদিক রাশি x_3 অক্ষরেখার চারদিকে অয়ন (precession) গতিতে চলে। বস্তুর সঙ্গে সংলগ্ন স্থানাঙ্কে অবস্থিত দর্শকের কাছে $\underline{\omega}$ সদিক রাশি প্রতিসাম্য অক্ষের চারদিকে একটি শঙ্কু সৃষ্টি করে।

যেহেতু আরোপিত ব্যাবর্তন বল নেই তাই মহাকাশে স্থির স্থানাঙ্কের প্রেক্ষিতে কৌণিক ভরবেগ সদিক রাশি $\underline{L}$ ধ্রুবক। গতিশক্তি

$$T = \frac{1}{2}\,\underline{\omega} \cdot \underline{L}$$

ধ্রুবক; তাই যেহেতু $\underline{L}$ ধ্রুবক, $\underline{\omega}$ সদিক রাশি এমনভাবে ঘোরে যে $\underline{L}$ সদিক রাশির দিকে তার অভিক্ষেপ ধ্রুবক। এখন $\underline{L}$ সদিক রাশিকে মহাকাশে স্থির



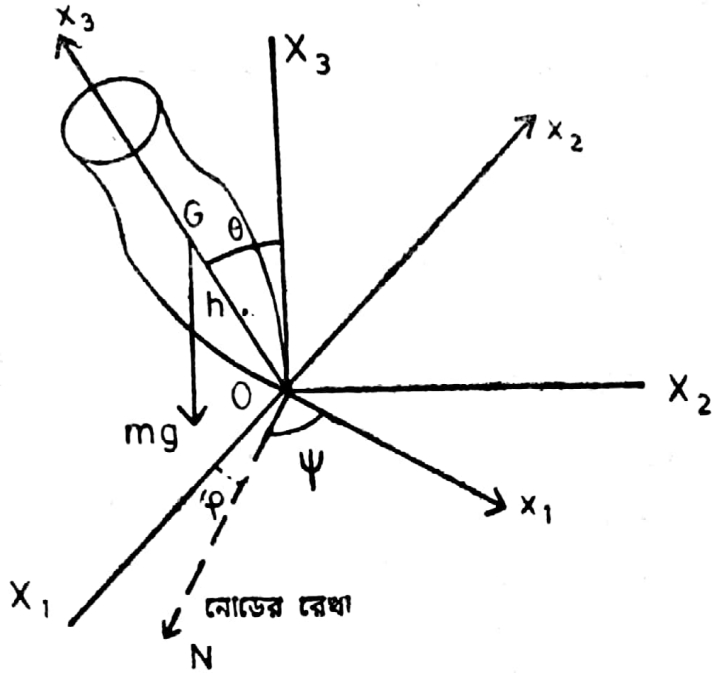
চিত্র: ৬.১২

স্থানাঙ্কের OX_3 অক্ষের দিকে নেয়া হলে স্পষ্টতই এই স্থানাঙ্কের একজন দর্শকের কাছে $\underline{\omega}$ সদিক রাশি স্থির OX_3 অক্ষরেখার চারপাশে একটি শঙ্কু তৈরি করে এবং একই সঙ্গে $\underline{\omega}$ সদিক রাশি বস্তুর প্রতিসাম্য অক্ষ Ox_3-র চারদিকে আরেকটি শঙ্কু সৃষ্টি করে। সুতরাং একটি শঙ্কু আরেকটির উপরে এমনভাবে ঘোরে যাতে কৌণিক বেগের সদিক রাশি বস্তুর প্রতিসাম্য অক্ষের চারপাশে ঘূর্ণনশীল হয় এবং একই সঙ্গে তা কৌণিক ভরবেগ সদিক রাশির চারদিকেও ঘোরে।

৬·১০ প্রতিসম লাটিমের গতি

দৃঢ়বস্তুর গতির একটি গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণ হল প্রতিসাম্যময় লাটিমের গতি। আমরা একটি প্রতিসম লাটিম নেই যার একটি বিন্দু স্থির এবং যা মাধ্যাকর্ষণ শক্তির অধীনে ঘূর্ণনশীল।

আমরা মহাকাশে স্থির স্থানাঙ্ক $OX_1\ X_2\ X_3$ এবং বস্তুর সঙ্গে সংযুক্ত স্থানাঙ্ক $Ox_1\ x_2\ x_3$ এমনভাবে নেই যাতে তাদের মূল বিন্দু একই এবং ফলে তার সরণ-জনিত গতিশক্তি শূন্য হয়। লাটিমের ভরকেন্দ্র G মূলবিন্দু থেকে h দূরত্বে এবং তার ভর m।



চিত্র : ৬.১৩

প্রতিসম লাটিমের জড়ত্বের প্রধান মোমেন্ট x_3 অক্ষের দিকে I_3 অন্য দুটি প্রধান জড়ত্বের মোমেন্ট থেকে পৃথক এবং প্রতিসাম্যের ফলে $I_1 = I_2$। সুতরাং গতিশক্তি হল

$$T = \tfrac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \tfrac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \qquad (৬.২৬)$$

কিন্তু অয়লার কোণ (φ, θ, ψ)-এর ভিত্তিতে

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi$$
$$\omega_2 = \dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi$$
$$\omega_3 = \dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi}$$

সুতরাং

$$T = \tfrac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi})^2$$

বিভবশক্তি হল mgh এবং তাই লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক লেখা যায়

$$L = \tfrac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi})^2 - mgh \cos\theta \qquad (৬.২৭)$$

যেহেতু এই অপেক্ষকে φ এবং ψ প্রত্যক্ষভাবে আসেনি তাই তাদের পর্যায়বৃত্তের চক্ররাশি (cyclic) বলে। আমরা জানি পর্যায়বৃত্তের পরিবর্তী রাশির অনুষঙ্গী ভরবেগ p_φ এবং p_ψ গতিজনিত ধ্রুবক। সুতরাং অয়লার লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = p_\varphi = (I_1 \sin^2\theta + I_3 \cos^2\theta)\dot{\varphi} + I_3 \dot{\psi}\cos\theta = \text{ধ্রুবরাশি} \qquad (৬.২৮)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = p_\psi = I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) = \text{ধ্রুবরাশি} \qquad (৬.২৮ক)$$

এর তাৎপর্য এই যে যেহেতু φ এবং ψ দুটি কোণ তাই p_φ এবং p_ψ ধ্রুবরাশি দুটি OX_3 এবং Ox_3 অক্ষের দিকে ধ্রুব কৌণিক ভরবেগ। মাধ্যাকর্ষণজনিত 'বলের মোমেন্ট' বা ব্যাবর্তন বল পাতন রেখার (ON) দিকে এবং তাই X_3 আর x_3 অক্ষরেখার দিকে কৌণিক ভরবেগ ধ্রুব। (৬.২৮) সমীকরণের দ্বিতীয়টি থেকে (৬.২৮ক)

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi - I_3\dot{\varphi}\cos\theta}{I_3}$$

এবং এটি প্রথমটিতে বসিয়ে,

$$(I_1\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\dot{\varphi} + (p_\psi - I_3\dot{\varphi}\cos\theta)\cos\theta = p_\varphi$$

অর্থাৎ

$$I_1\sin^2\theta\,\dot{\varphi} + p_\psi\cos\theta = p_\varphi$$

সুতরাং

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta} = \frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta} \qquad (৬.২৯)$$

যেখানে

$$a = p_\psi / I_1 \qquad b = p_\varphi / I_1$$

এবং

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} = \frac{(b - a\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta} \qquad (৬.৩০)$$

যেহেতু সামগ্রিক শক্তি ধ্রুবক,

$$E = \tfrac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2} I_3 \omega_3^2 + mgh\cos\theta = \text{ধ্রুবক}$$

কিন্তু

$$\omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

এবং

$$p_\psi = I_3 \omega_3 = \text{ধ্রুবক}$$

সুতরাং

$$I_3 \omega_3^3 = \frac{p_\psi^2}{I_3} = \text{ধ্রুবক}$$

অতএব

$$E - \tfrac{1}{2} I_3 \omega_3^2 = \text{ধ্রুবক} = E'$$

এখন আমরা লিখতে পারি

$$E' = \tfrac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + mgh\cos\theta = \text{ধ্রুবক}$$

(৬.২৯) সমীকরণ ব্যবহার করে,

$$E' = \tfrac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + V(\theta) \qquad (৬.৩১)$$

যেখানে

$$V(\theta) = \tfrac{1}{2} I_1 \frac{(b - a\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + mgh\cos\theta$$

(৬.৩১) সমীকরণকে সমাকলন করে,

$$t = \sqrt{\frac{2}{I_1}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{E' - V(\theta)}} \qquad (৬.৩২)$$

কিন্তু (৬.৩১) সমীকরণকে এভাবে লেখা বেশি উপযোগী,

$$\alpha = \dot{\theta}^2 + \frac{(b - a\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + \beta\cos\theta$$

যেখানে

$$\alpha = \frac{2E'}{I_1} \quad \text{এবং} \quad \beta = \frac{2mgh}{I_1}$$

এখন $u = \cos\theta$ বসিয়ে $[\dot{u} = -\sin\theta\,\dot{\theta},\ \dot{\theta}^2 = \dot{u}^2/(1-u^2)]$ আমরা পাই

$$\alpha = \frac{\dot{u}^2}{1-u^2} + \frac{(b-\alpha u)^2}{1-u^2} + \beta u$$

সুতরাং

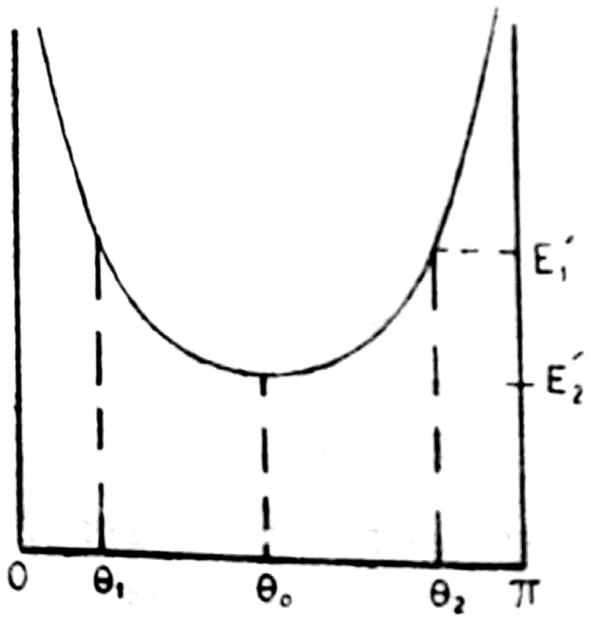
$$\dot{u}^2 = (1-u^2)(\alpha-\beta u) - (b-au)^2 \qquad (৬.৩৩)$$

সমাকলন করে,

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(\alpha-\beta u) - (b-au)^2}} \qquad (৬.৩৪)$$

এ ধরনের সমাকলনকে উপবৃত্তাকার সমাকলন বলে এবং তাদের সমাধান উপবৃত্তাকার অপেক্ষক দিয়ে প্রকাশ করা হয়। সমাকলনটি বাস্তবিকই না করেও লাটিম গতির সাধারণ বৈশিষ্ট্যগুলি সম্বন্ধে কিছু বলা যায়।

পরিবর্তী রাশি θ-এর ব্যাপ্তি নির্ধারিত হয় $E' > V(\theta)$ এই শর্ত দিয়ে। $V(\theta)$ অপেক্ষক অসীম হয়ে যায় যখন $\theta = 0$ এবং π। এই দুই মানের মধ্যে



চিত্র : ৬.১৪

$V(\theta)$ এর মান সর্বনিম্ন থাকে। সুতরাং $E' = V(\theta)$ এই সমীকরণের দুটি মূল আছে যা দিয়ে θ কোণের প্রান্তিক মান θ_1 এবং θ_2 পাওয়া যায়। এই সর্বনিম্ন

মানের জন্য

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{\theta_0} = 0$$

সুতরাং

$$\cos\theta_0\,\beta'^2 - p_\psi \sin^2\theta_0\,\beta' + mgh\,I_1 \sin^4\theta_0 = 0$$

যেখানে

$$\beta' = p_\varphi - p_\psi \cos\theta_0$$

এটি একটি β'-এর দ্বিঘাত সমীকরণ যার মূল হল

$$\beta' = \frac{p_\psi \sin^2\theta_0}{2\cos\theta_0}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mgh\,I_1\cos\theta_0}{p_\psi^2}}\right]$$

যেহেতু β' ধনাত্মক হবে তাই $\left(\theta_0 < \frac{\pi}{2}\right)$,

$$p_\psi^2 \geqslant 4\,mgh\,I_1\cos\theta_0$$

সুতরাং

$$\omega_3 \geqslant \frac{2}{I_3}\sqrt{mgh\,I_1\cos\theta_0} \qquad (৬.৩৫)$$

কেননা $p_\psi = I_3\,\omega_3$। অতএব লাটিমের গতি হল θ_0 কোণে অবিচল ঘূর্ণন যদি কৌণিক গতিবেগ বা স্পিন (৬.৩৫) সমীকরণের বেশি হয়।

এখন θ_0 কোণের জন্য অনুরূপ $\dot{\varphi}$ হল

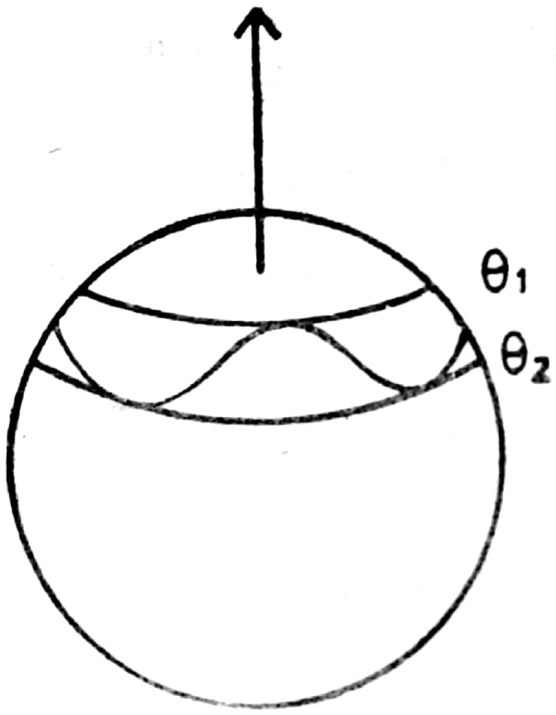
$$\dot{\varphi}_0 = \frac{\beta'}{I_1 \sin^2\theta_0}$$

যার β'-এর দুটো মানের জন্যে দুটি মান থাকবে। যদি ω_3 অথবা p_ψ বড় হয় অর্থাৎ দ্রুত ঘূর্ণনশীল লাটিমের ক্ষেত্রে আমরা আসন্ন মান নিয়ে পাই,

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{I_3\,\omega_3}{I_1\cos\theta_0} \quad \text{অথবা} \quad \frac{mgh}{I_3\,\omega_3} \qquad ৬.৩৬)$$

এবং সাধারণত দ্বিতীয় ঘূর্ণন গতিবেগটাই দেখা যায়।

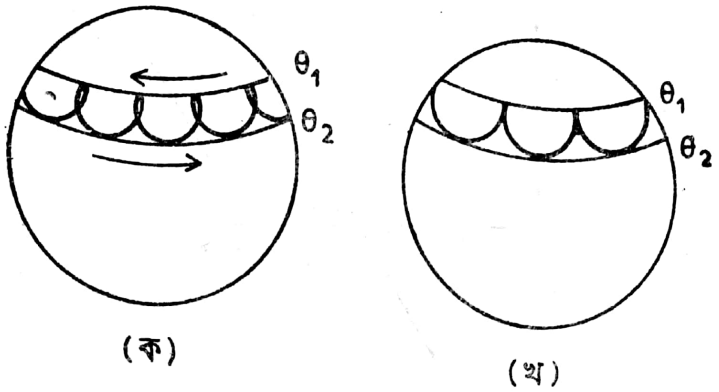
যদি $\theta_1 < \theta < \theta_2$ হয় তাহলে যখন θ তার প্রান্তিক মানের মধ্যে পরিবর্তিত হয় তখন অয়নবেগ $\dot{\varphi}$ এর পরিবর্তন হতেও পারে, নাও হতে পারে এবং তা নির্ভর করে p_φ এবং p_ψ এর মানের উপরে। যদি $\dot{\varphi}$-এর চিহ্ন পরিবর্তন না হয়, তাহলে লাটিম X_3-অক্ষের চারদিকে অব্যাহতভাবে ঘোরে এবং প্রতিসাম্য অক্ষ Ox_3



চিত্র ঃ ৬.১৫

তখন θ_1 এবং θ_2 মানের মধ্যে স্পন্দিত হয়। এটিকেই বলে নিউটেশন বা অক্ষ-বিচলন (চিত্র ৬.১৫)। ছবিতে বর্তুলের পৃষ্ঠে x_3-অক্ষের শীর্ষ বিন্দুর গতিপথ দেখানো হয়েছে বক্ররেখা দিয়ে। বর্তুলের কেন্দ্র হল লাটিমের স্থির বিন্দু।

আবার যদি θ_1 এবং θ_2 প্রান্তিক কোণদ্বয়ের মধ্যে $\dot{\varphi}$-এর চিহ্নের পরিবর্তন ঘটে তাহলে θ_1 এবং θ_2 প্রান্তে অয়নের কৌণিক গতিবেগ বিপরীত হবে অর্থাৎ দুই প্রান্তিক বৃত্তে ঐ ঘূর্ণনের দিক বিপরীতমুখী এবং তাই লাটিমের শীর্ষ (Ox_3 অক্ষ) উন্নম্বের চারপাশে ঘোরার সময়ে ফাঁস আকৃতির বক্ররেখা তৈরি করে [চিত্র ৬.১৬(ক)]। সবশেষে যদি θ_1 এবং θ_2 কোন একটা β এর মান শূন্য দেয় তাহলে $\dot{\varphi}$ এবং $\dot{\theta}$ দুটিই একই সঙ্গে প্রান্তিক বৃত্তে শূন্য হয়ে যায় এবং তখন লাটিমের গতিপথ যে বক্ররেখা দেয় তাকে গণিতে বলে কাস্প্ [চিত্র ৬.১৬(খ)]।



(ক) (খ)

চিত্র ঃ ৬.১৬

বাস্তবিকই θ কোণের যে দুটি প্রান্তিক মান থাকে তা দেখা যায়, যদি আমরা নিচের সমীকরণ আলোচনা করি,

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \qquad (৬.৩৭)$$

যেখানে

$$f(u) = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2$$

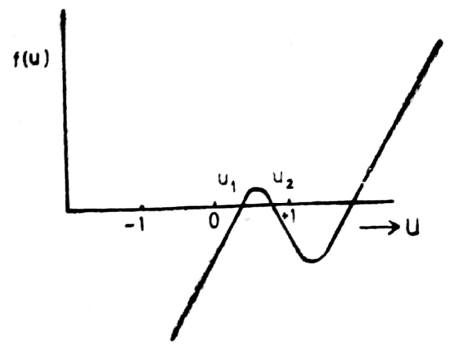
যেহেতু t বাস্তব তাই $f(u)$ কখনও ঋণাত্মক হতে পারে না।

এখন ত্রিঘাত সমীকরণ

$$f(u) = 0$$

থেকে কোণ পাওয়া যায় যেখানে $\dot{\theta}$-র চিহ্ন পরিবর্তন হয় (ঘুরানোর বিন্দু)। যখন u খুব বড়, $f(u) = \beta u^3$ এবং যেহেতু β ধনাত্মক, তাই বৃহৎ ধনাত্মক u এর জন্যে $f(u)$ ধনাত্মক এবং বৃহৎ ঋণাত্মক u এর জন্যে $f(u)$ ঋণাত্মক। যখন $u = \pm 1$, তখন $f(u) = -(b \pm a)^2$ এবং তাই $u = \pm 1$ বিন্দুতে $f(u)$ সব সময়েই ঋণাত্মক। সুতরাং ত্রিঘাত সমীকরণের তিনটি মূলের একটি $u > 1$ অঞ্চলে অবস্থিত।

কিন্তু $u > 1$ হলে বাস্তব কোণ পাওয়া যায় না কেননা $u = \cos\theta$। যেহেতু θ-র মান 0 এবং π এর মধ্যে, তাই u-এর মান -1 এবং $+1$ এর মধ্যে থাকতেই হবে। আবার $f(u)$ ঋণাত্মক হতে পারে না। সুতরাং $f(u)$ অপেক্ষকের



চিত্র ঃ ৬.১৭

কেবল দুটি মূল u_1 এবং u_2 থাকতে পারে (চিত্র ৬.১৭)। সুতরাং লাটিমের শীর্ষ বিন্দু θ_1 এবং θ_2 এই প্রান্তিক মানের মধ্যে থাকে যেখানে $\dot{\theta}$ এর মান শূন্য।

প্রশ্নমালা

১। নিম্নের সুষম বস্তুগুলির প্রধান জড়ত্বের মোমেন্ট নির্ধারণ কর:

(ক) একটি বৃত্তাকার শঙ্কু যার ভূমির ব্যাসার্ধ R এবং উচ্চতা h।
(খ) একটি উপবৃত্তক বা ঘন উপবৃত্ত যার অর্ধঅক্ষগুলি হল a, b, c।
(গ) একটি সুষম কিউব বা ঘনক যার প্রতিটি বাহু হল a।
(ঘ) একটি সুষম বৃত্তাকার নিরেট বেলন যার ব্যাসার্ধ a।
(ঙ) একটি ফাঁপা গোলক যার ব্যাসার্ধ a।

২। একটি বৃত্তের অর্ধচতুর্থাংশের আকারে একটি থালা নেয়া হল যে বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দু স্থির। দেখাও যে কেন্দ্রবিন্দুগামী উল্লম্ব অক্ষের চারদিকে কম্পনের স্পন্দন সংখ্যা হল

$$\omega = \sqrt{\frac{8\sqrt{2}}{3\pi}} \sqrt{\frac{g}{R}}$$

যেখানে R হল বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

৩। একটি সুষম শঙ্কুর গতিশক্তি নির্ধারণ কর যার তলা একটি সমান্তরাল তলে না পিছলে ঘোরে এবং যার শীর্ষবিন্দু শঙ্কুর তলার ব্যাসার্ধের সমান উচ্চতায় একটি বিন্দুতে স্থির।

৪। সমান্তরাল তলে ঘূর্ণায়মান সুষম শঙ্কুর গতিশক্তি নির্ধারণ কর।

৫। নিচের জড়ত্বের টেন্সরের উপরে

$$\begin{pmatrix} \frac{A+B}{2} & \frac{A-B}{2} & 0 \\ \frac{A-B}{2} & \frac{A+B}{2} & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

z-অক্ষের চারপাশে θ কোণে একটি স্থানাঙ্ক প্রণালীর ঘূর্ণন আরোপ কর। দেখাও যে $\theta = \pi/4$ মানের জন্য জড়ত্ব টেন্সর কর্ণায়িত করা যায়।

৬। ধরা যাক একটি পাতলা সুষম প্লেট xy তলে রাখা আছে। দেখাও যে জড়ত্বের টেন্সর এভাবে লেখা যায়,

$$\begin{pmatrix} A & -C & 0 \\ -C & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}$$

এখন যদি x-অক্ষের চারপাশে স্থানাঙ্ক ব্যবস্থাকে θ কোণে ঘুরান হয় তবে দেখাও যে নতুন জড়ত্ব টেন্সর হল

$$\begin{pmatrix} A' & -C' & 0 \\ -C' & B' & 0 \\ 0 & 0 & A'+B' \end{pmatrix}$$

যেখানে

$$A' = A\cos^2\theta - C\sin 2\theta + B\sin^2\theta$$

$$B' = A\sin^2\theta + C\sin 2\theta + B\cos^2\theta$$

$$C' = C\cos 2\theta - \tfrac{1}{2}(B-A)\sin 2\theta$$

সুতরাং দেখাও যে x এবং y প্রধান অক্ষ হয় যখন

$$\theta = \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2C}{B-A}\right)$$

৭। একটি লাট্টু তার অক্ষের চারদিকে ω_3 কৌণিক বেগে ঘোরে এবং তার অক্ষ প্রাথমিকভাবে θ_1 কোণে স্থির রেখে তাকে ঘুরানো হয়েছে। দেখাও যে অয়নের (precession) গড় কৌণিক গতিবেগ হল

$$\langle \dot{\varphi} \rangle = mgh / I_3 \omega_3$$

৮। একটি লাট্টু প্রাথমিকভাবে তার অক্ষকে ঠিক খাড়া রেখে ঘূর্ণনশীল। দেখাও যে তার নিজস্ব ঘূর্ণন বা স্পিন (spin) গতিবেগ যদি একটি বিশেষ মানের বেশি হয় তবে তা অবিচলিত গতিসম্পন্ন হবে (নিদ্রিত লাট্টু)।

৯। দেখাও যে কোন দৃঢ় সংবদ্ধ বস্তুর একটি স্থির বিন্দুর পরিপ্রেক্ষিতে সাধারণ গতিবেগের ক্ষেত্রে তার গতিশক্তির সময় অনুসারে পরিবর্তন হল,

$$\dot{T} = \underline{\omega} \cdot \underline{N}$$

যেখানে $\underline{N}$ হল ব্যাবর্তন হল।

১০। পাতলা, সুষম, বৃত্তাকার চাকতির আকারের একটি লাট্টু বিবেচনা কর, যার ব্যাসার্ধ a এবং কেন্দ্র C। লাট্টুটি তার পৃষ্ঠদেশের স্থির বিন্দু O এর চারদিকে ঘুরতে পারে। উল্লম্ব OZ অক্ষের সঙ্গে OC যে কোণ করে তা হল θ এবং ZOC তল ও একটি স্থির উল্লম্ব তলের মধ্যে কোণ হল ϕ। প্রাথমিকভাবে

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\phi} = \frac{2}{5} n$$

যেখানে $n = \sqrt{15g / 2a}$ হল অক্ষের চারদিকে লাট্টুর স্পিন (spin)। দেখাও যে t সময়ে,

$$\cos\theta = \tanh^2\left(t\sqrt{3g/10a} \right).$$

সপ্তম অধ্যায়

ক্ষুদ্র কম্পন তত্ত্ব

কোন কোন ভৌত বস্তুর এক ধরনের নিয়ন্ত্রিত গতি থাকে যা তার স্থায়ী স্থিতাবস্থার কাছাকাছি ক্ষুদ্র সরণ মাত্র। এর একটা উদাহরণ হল কেলাসে পারমাণবিক ঝারি বা ল্যাটিসের স্পন্দন। যদিও এ ধরনের গতি জটিল তবু তাকে সসীম সংখ্যক সরল সুসমঞ্জস গতির রৈখিক সমাহার হিসেবে প্রকাশ করা যায়। প্রতিটি সরল সুসমঞ্জস গতির উপাংশ ঝারির একটি সম্ভাব্য গতি। এই উপাংশগুলিকে বস্তু-নিচয়ের স্পন্দনের সাধারণ প্রকৃতি (normal mode) বলে।

একটি সংরক্ষণশীল বলের প্রভাবাধীন একটি বস্তু বিবেচনা করা যায় যার বিভবশক্তি শুধু অবস্থানের অপেক্ষক। আমরা ধরে নেব যে বস্তুগতির ব্যাপ্তি খুব ছোট এবং তা স্থিতাবস্থার কাছাকাছি। ধরা যাক বস্তুকণাগুলির সাধারণ অক্ষাংশ হল q_i এবং এটিও অনুমান করা হবে যে সাধারণ অক্ষাংশের সংজ্ঞাদান-কারী রূপান্তর সমীকরণগুলিতে সময় প্রত্যক্ষভাবে থাকে না। সুতরাং সময়নির্ভর শর্ত বিবেচনা করা হবে না। এই বস্তুনিচয় স্থিতাবস্থায় থাকে যখন বস্তুকণার উপর সক্রিয় সাধারণ বলগুলি শূন্য,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 = 0 \qquad (৭.১)$$

যেখানে অন্তরকলনের মান $q_i^{(o)}$ অক্ষাংশের জন্য গণনা করার কথা শূন্য দিয়ে নির্দেশ করা হয়েছে। এখানে $q_i^{(o)}$ অক্ষাংশগুলি হল স্থিতাবস্থার অক্ষাংশ। যেহেতু স্থিতাবস্থা থেকে পরিবর্তন খুব ছোট নেয়া হবে বলা হয়েছে তাই

$$q_i = q_i^{(o)} + \eta_i$$

যেখানে η_i রাশি ক্ষুদ্র। এখন বস্তুনিচয়ের বিভবশক্তি অপেক্ষককে স্থিতাবস্থার সন্নিকটে টেলর প্রসারণ করে লেখা যায়,

$$V(q_i) = V(q_i^{(o)}) + \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 \delta q_i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \delta q_i \delta q_j + \ldots$$

(৭.২)

যেখানে পুনরাবৃত্ত সূচকের উপর যোগের রীতি অনুসারে সমষ্টিকরণ প্রতীক Σ কে উহ্য রাখা হয়েছে অর্থাৎ

$$\delta q_i \, \delta q_j \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \, \partial q_i} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \, \partial q_i} \delta q_i \, \delta q_j$$

যেখানে N বস্তুকণার সংখ্যা। যেহেতু q_iগুলির চাইতে পরিবর্তন δq_i বেশি দরকারী তাই লেখা যায়,

$$\delta q_i = q_i - q_i^{(o)} = \eta_i$$

এবং η_i গুলিকে সাধারণ অক্ষাংশ বলে বিবেচনা করা যায়। এখন

$$\frac{\partial}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial \eta_i}$$

সুতরাং

$$V(q_i) = V(q_i^{(o)}) + \eta_i \left(\frac{\partial V}{\partial \eta_i} \right)_o + \tfrac{1}{2} \eta_j \, \eta_i \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta_i \, \partial \eta_j} \right)_o + \ldots \quad (7.3)$$

যেখানে ডানদিকের প্রথম অংশটি একটি ধ্রুবক যাকে শূন্য নেয়া যায়, কেননা বিভবশক্তির পার্থক্যই পরীক্ষাগারে মাপা হয়। (৭.১) সমীকরণ ব্যবহার করে, আমরা স্থিতাবস্থার কাছে প্রথম আসন্নমানে পাই,

$$V = \tfrac{1}{2} V_{ij} \, \eta_i \, \eta_j \quad (7.4)$$

যেখানে $$V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial \eta_i \, \partial \eta_j}$$

রাশিগুলি η_i এর উপর নির্ভরশীল নয়।

কার্টেশীয় স্থানাঙ্কে বস্তুর গতিশক্তি হল

$$T = \tfrac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$$

যেখানে বস্তুকণার ভর হল m_i। এখন সাধারণ স্থানাঙ্কে রূপান্তর করে আমরা লিখতে পারি,

$$q_i = q_i(x_i)$$

অর্থাৎ $$x_i = x_i(q_j)$$

যেখানে সময়ের উপর নির্ভরশীলতা বাদ দেয়া হয়েছে। সুতরাং

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\ \dot{q}_j = \frac{\partial x_i}{\partial \eta_j}\ \dot{\eta}_j \qquad (৭.৫)$$

অতএব $$T = \tfrac{1}{2}\, m_i\ \frac{\partial x_i}{\partial \eta_j}\ \frac{\partial x_i}{\partial \eta_k}\ \dot{\eta}_j\, \dot{\eta}_k \qquad (৭.৬)$$

যেহেতু গতির ব্যাপ্তি খুব ছোট বলে অনুমান করা হয়েছে তাই আমরা টেলর প্রসারণ করে লিখতে পারি,

$$\frac{\partial x_i}{\partial \eta_j} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \eta_j}\right)_o + \eta_k \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial \eta_k\, \partial \dot{\eta}_j}\right)_o + \cdots$$

সুতরাং

$$T = \tfrac{1}{2}\, T_{jk}\ \dot{\eta}_j\ \dot{\eta}_k + \cdots \qquad (৭.৭)$$

যেখানে $$T_{jk} = m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial \eta_j}\right)_o \left(\frac{\partial x_i}{\partial \eta_k}\right)_o \qquad (৭.৮)$$

রাশিগুলি আবার η_i নিরপেক্ষ। সুতরাং প্রথম আসন্নমানে লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষককে লেখা যায়,

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}\,(T_{jk}\ \dot{\eta}_j\ \dot{\eta}_k - V_{jk}\, \eta_j\, \eta_k) \qquad (৭.৯)$$

যেহেতু η_i গুলিকে এখন সাধারণ অক্ষাংশ নেয়া হয়েছে তাই এই লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ থেকে আমরা গতিসমীকরণ পাই,

$$\frac{d}{dt}\left(T_{jk}\ \dot{\eta}_k\right) + V_{jk}\, \eta_k = 0$$

সুতরাং

$$T_{jk}\ \ddot{\eta}_k + V_{jk}\, \eta_k = 0 \qquad (৭.১০)$$

এখানে লক্ষ্য করা দরকার যে

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_i} = -\frac{\partial V}{\partial \eta_i} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \eta_i}\left(V_{jk}\,\eta_j\,\eta_k\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(V_{jk}\,\delta_{ij}\,\eta_k + V_{ik}\,\eta_j\,\delta_{ki}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(V_{ik}\,\eta_k + V_{ji}\,\eta_j\right) = -V_{ij}\,\eta_j$$

কেননা বিভবশক্তি প্রতিসম

$$V_{ij} = V_{ji}$$

একইভাবে

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = T_{ij}\,\dot{\eta}_j$$

(৭.১০) সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে বস্তুকণার গতির মধ্যে পারস্পরিক যোগাযোগ নিবিড় অর্থাৎ তারা পরস্পরের গতিকে গভীরভাবে প্রভাবিত করে। এখন ধরা যাক যে প্রতিটি বস্তুকণার গতি পর্যায়বৃত্তের অর্থাৎ প্রতিটি বস্তুকণার কৌণিক স্পন্দনসংখ্যা ω হলে লেখা যায়,

$$\eta_k = \eta_k^{(0)}\, e^{i\omega t} \quad \text{অথবা} \quad \mathrm{Re}\;\eta_k^{(0)}\, e^{i\omega t} \qquad (৭.১১)$$

যেখানে $\eta_k^{(0)}$ রাশিগুলি ধ্রুবক। সুতরাং

$$\ddot{\eta}_k = -\omega^2\,\eta_k$$

এবং তাই (৭.১০) সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$\left(V_{ij} - \omega^2\,T_{ij}\right)\eta_j^{(0)} = 0 \qquad i, j = 1, 2, \ldots, N \quad (৭.১২)$$

এখানে N সংখ্যক অজ্ঞাত রাশি $\eta_j^{(0)}$-এর জন্যে N সংখ্যক পরস্পরসংশ্লিষ্ট সমীকরণ লেখা হয়েছে। এই সমীকরণগুলির সমাধান সম্ভব যখন সহগগুলির নির্ণায়ক শূন্য হয়,

$$\det\left(V_{ij} - \omega^2\,T_{ij}\right) = 0 \qquad (৭.১৩)$$

যেহেতু (৭.১০) সমীকরণ একটি N-মাত্রার বীজগাণিতিক সমীকরণ তাই তার N সংখ্যক মূল রয়েছে ω_i^2 $(i=1, 2 \ldots, N)$। এই মূলগুলি সব ধনাত্মক হলে আমরা (৭.১১) সমীকরণ থেকে N সংখ্যক পর্যায়বৃত্তের সমাধান η_k পাই যার প্রতিটির সঙ্গে সংশ্লিষ্ট বস্তুবিন্যাস স্থায়ী স্থিতাবস্থার বিন্যাস। কোন মূল ঋণাত্মক হলে সেই সমাধান অপর্যায়বৃত্তের কেননা স্পন্দনসংখ্যা ω তখন অবাস্তব এবং তার সংশ্লিষ্ট বস্তুকণা বিন্যাস অস্থিতিশীল।

স্থায়ী স্থিতাবস্থার জন্য (৭.১৩) সমীকরণের মূলগুলি ধনাত্মক বলে আমরা N সংখ্যক পর্যায়কাল $2\pi/\omega_s$ $(s=1, 2, \ldots N)$ পাই। এগুলিকে সাধারণ পর্যায়কাল বলে। (৭.১২) সমীকরণ থেকে আমরা $\eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \ldots \eta_N^{(0)}$ ব্যাপ্তি-গুলির পারস্পরিক অনুপাত নির্ধারণ করতে পারি। যখন $\omega = \omega_s$, তখন (৭.১৩) সমীকরণের বাঁদিকে নির্ণায়কের যে কোন সারি বা স্তম্ভের সহ-উৎপাদক হল $C_1(\omega_s), C_2(\omega_s), \ldots, C_N(\omega_s)$ এবং তাই

$$\frac{\eta_1^{(0)}}{C_1(\omega_s)} = \frac{\eta_2^{(0)}}{C_2(\omega_s)} = \ldots = \frac{\eta_N^{(0)}}{C_N(\omega_s)} = a_s \qquad (৭.১৪)$$

সুতরাং ω_s মূলের জন্যে সমাধানগুলি হল,

$$\eta_1 = C_1(\omega_s)\, a_s \cos(\omega_s t + \epsilon_s)$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$\eta_N = C_N(\omega_s)\, a_s \cos(\omega_s t + \epsilon_s)$$

যেহেতু (৭.১০) সমীকরণ রৈখিক অন্তরকলন সমীকরণ তাই তার অতি সাধারণ সমাধান লেখা যায়,

$$\eta_1 = \sum_{s=1}^{N} C_1(\omega_s)\, a_s \cos(\omega_s t + \epsilon_s)$$
$$\ldots \qquad (৭.১৫)$$
$$\eta_N = \sum_{s} C_N(\omega_s)\, a_s \cos(\omega_s t + \epsilon_s)$$

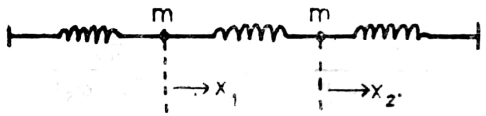
স্পষ্টতই এই সমাধানগুলিতে $a_1, \ldots a_N, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_N$ এই মোট 2N সংখ্যক সমাকলন ধ্রুবক রয়েছে। এভাবে (৭.১২) সমীকরণের সমাধান প্রক্রিয়া আসলে প্রধান অক্ষের রূপান্তর এবং যে অক্ষাংশে η_i গুলি এভাবে নির্ধারিত হয় তাদের

বস্তুর সাধারণ স্থানাঙ্ক বলে। যদি η_r ছাড়া বাকি $N-1$ সাধারণ অক্ষাংশের সবগুলি শূন্য হয় তাহলে বলা হয় যে বস্তুটি η_r সাধারণ স্পন্দন প্রকৃতিতে কম্পনশীল। প্রতিটি বস্তুকণার প্রতিটি স্পন্দন প্রকৃতি পর্যায়বৃত্তের।

স্থাপত্য প্রকৌশলে অনেক সময়ে কাঠামোর 'সাধারণ পর্যায়কাল' জানা প্রয়োজন হয় যাতে আরোপিত কোন বলের পর্যায়কাল ঐ সময়ের সঙ্গে এক না হয়ে যায়, কেননা তাহলে অনুরণন প্রক্রিয়ায় গতির ব্যাপ্তি অত্যন্ত বেশি হয়ে যাওয়ার আশঙ্কা থাকে।

৭.২ দুটি সংযুক্ত সুষম স্পন্দকের গতি

আমরা সংযুক্ত গতির সহজতম উদাহরণ নিতে পারি—দুটি একই রকমের সুষম স্পন্দক যা একটি স্প্রিং দ্বারা পরস্পরের সঙ্গে যুক্ত। ধরা যাক প্রতিটি সুষম



চিত্র : ৭.১

স্পন্দকের বল ধ্রুবক হল k এবং সংযোগকারী স্প্রিং-এর বল ধ্রুবককেও k নেয়া যায়। যেহেতু বস্তুকণা দুটির সংযোগকারী সরলরেখার দিকে তাদের গতি তাই এই বস্তুনিচয়ের স্বাধীনতার-মাত্রা দুই। স্থিতাবস্থা থেকে সরণ x_1 এবং x_2 দিয়ে এই দুটি স্বাধীনতার মাত্রা বা সাধারণ অক্ষাংশ প্রকাশ করা যায়।

সুতরাং বস্তুনিচয়ের গতিশক্তি হল,

$$T = \tfrac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

এবং বিভবশক্তি হল,

$$V = \tfrac{1}{2} k x_1^2 + \tfrac{1}{2} k x_2^2 + \tfrac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

অতএব লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক লেখা যায়,

$$L = T - V$$

$$= \tfrac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2} m \dot{x}_2^2 - \tfrac{1}{2} k x_1^2 - \tfrac{1}{2} k x_2^2 - \tfrac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

সুতরাং গতিসমীকরণ হল

$$m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_2) = 0$$
$$m\ddot{x}_2 + k(2x_2 - x_1) = 0$$

এখন পর্যায়বৃত্তের সমাধান

$$x_1 = B_1 \cos \omega t \qquad x_2 = B_2 \cos \omega t$$

নিয়ে আমরা পাই,

$$\begin{aligned} -m\omega^2 B_1 + k(2B_1 - B_2) &= 0 \\ -m\omega^2 B_2 + k(2B_2 - B_1) &= 0 \end{aligned} \qquad (৭.১৬)$$

সুতরাং সমাধানের জন্যে আমাদের সঠিক সমীকরণ (secular equation) হল,

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

যার সমাধান সহজেই পাওয়া যায়,

$$2k - m\omega^2 = \pm k$$

সুতরাং

$$\omega = \sqrt{\frac{2k \pm k}{m}}$$

এখানে বর্গমূলের আগে কোন ঋণাত্মক চিহ্ন দেয়ার প্রয়োজন নেই, কেননা $\cos(-\omega) = \cos\omega$। সুতরাং বিশেষ স্পন্দনসংখ্যা বা আইগেন স্পন্দনসংখ্যা (eigen frequency) হল দুটি,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

এবং তার সংশ্লিষ্ট সমাধান হল,

$$\begin{aligned} &(১) \quad x_1 = B_1 \cos \omega_1 t \qquad x_2 = B_2 \cos \omega_1 t \\ &(২) \quad x_1 = B_1' \cos \omega_2 t \qquad x_2 = B_2' \cos \omega_2 t \end{aligned} \qquad (৭.১৭)$$

অবশ্য গতির ব্যাপ্তি B_1 এবং B_2 পরস্পর নিরপেক্ষ নয়। কেননা (৭.১৭) সমীকরণ (৭.১৬) সমীকরণে বসিয়ে আমরা পাই,

(১) যখন $\omega = \omega_1$, $B_1 = -B_2$

(২) যখন $\omega = \omega_2$, $B_1' = B_2'$

সুতরাং আমরা লিখতে পারি

$$\begin{aligned} (১)\quad & x_1 = -x_2 = B\cos\omega_1 t \\ (২)\quad & x_1 = x_2 = B'\cos\omega_2 t \end{aligned} \qquad (৭.১৮)$$

প্রথমক্ষেত্রে বস্তুকণা দুটির স্পন্দনসংখ্যা ω_1, কিন্তু তাদের পরস্পরের মধ্যে দশার পার্থক্য 180°। এটাকে বলে বিপরীত প্রতিসাম্যের স্পন্দন প্রকৃতি। অন্যদিকে দ্বিতীয় ক্ষেত্রে স্পন্দনসংখ্যা এবং দশা একই। একে বলে প্রতিসাম্য-স্পন্দন প্রকৃতি। লক্ষ্য করা দরকার যে $\omega_1 > \omega_2$। প্রতিসাম্য প্রকৃতির স্পন্দনসংখ্যা কম। এটা একটি সাধারণ বৈশিষ্ট্য। যে কম্পনের প্রতিসাম্য যত বেশি তার স্পন্দনসংখ্যাও তত কম।

এখন দুটি বিশেষ সমাধান (৭.১৮ সমীকরণ) রৈখিক সমাহার করে আমরা সাধারণ সমাধান পাই। সুতরাং একজোড়া অক্ষাংশ প্রবর্তন করা যায়,

$$\xi_1 = x_1 - x_2 \qquad \xi_2 = x_1 + x_2$$

এবং গতিসমীকরণ থেকে লেখা যায়,

$$\begin{aligned} & m(\ddot{\xi}_1 + \ddot{\xi}_2) + k(3\xi_1 + \xi_2) = 0 \\ & m(\ddot{\xi}_1 - \ddot{\xi}_2) + k(3\xi_1 - \xi_2) = 0 \end{aligned} \qquad (৭.১৯)$$

অথবা $$m\ddot{\xi}_1 + 3k\xi_1 = 0$$

$$m\ddot{\xi}_2 + k\xi_2 = 0$$

এই দুটি সমীকরণের সমাধান হল

$$\xi_1(t) = C_1\cos\omega_1 t \qquad \xi_2(t) = C_2\cos\omega_2 t \qquad (৭.২০)$$

যেহেতু ξ_1 এবং ξ_2 পরস্পরবিচ্ছিন্ন তাই তারা স্বতন্ত্র অক্ষাংশ। এই দুটিই সাধারণ অক্ষাংশ।

৭.৩ মেট্রিক্স পদ্ধতি প্রয়োগ

একটি N সংখ্যক স্বাধীনতা-মাত্রার বস্তুনিচয়ের গতিশক্তি T আমরা জানি সাধারণ গতিবেগের সুষম দ্বিঘাত অপেক্ষক,

$$T = \frac{1}{2}T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$$

এবং বিভবশক্তিও সাধারণ অক্ষাংশের সুষম দ্বিঘাত অপেক্ষক,

$$V = \tfrac{1}{2} V_{ij}\, \eta_i\, \eta_j$$

সুতরাং লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হল

$$L = \tfrac{1}{2} (T_{ij}\, \dot{\eta}_i\, \dot{\eta}_j - V_{ij}\, \eta_i\, \eta_j)$$

যা থেকে গতিসমীকরণ পাওয়া যায়,

$$T_{ij}\, \ddot{\eta}_j + V_{ij} \cdot \eta_j = 0 \qquad (৭.২১)$$

এখন আমরা মেট্রিক্স পদ্ধতিতে লিখতে পারি,

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots \\ T_{21} & T_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots \\ V_{21} & V_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

এবং

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

সুতরাং গতিসমীকরণ (৭.২১ সমীকরণ) এভাবে প্রকাশ করা যায়,

$$T\, \ddot{\eta} + V\eta = 0 \qquad (৭.২২)$$

এই সমীকরণের পর্যায়বৃত্ত সমাধান

$$\eta_k = A_k \cos (\omega t + \epsilon_k)$$

ধরে নিয়ে আমরা পাই,

$$\ddot{\eta}_k = - \omega^2 \eta_k$$

সুতরাং (৭.২২) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$(V - \omega^2 T)\, \eta = 0 \qquad (৭.২৩)$$

যার সমাধান সম্ভব যখন

$$\det (V - T\omega^2) = 0 \qquad (৭.২৪)$$

এই সমীকরণটির মূলগুলি হল সাধারণ স্পন্দনসংখ্যা।

এখন (৭.২৩) সমীকরণকে বাম-দিক দিয়ে T^{-1} দিয়ে গুণ করে পাওয়া যায়,

$$(T^{-1} V - 1\omega^2)\eta = 0 \qquad (৭.২৫)$$

যেখানে 1 হল একক মেট্রিক্স। এটাই হল সঠিক মানের (eigen value) সমীকরণের আদর্শ রূপ। অর্থাৎ একটি মেট্রিক্স Q এর সঠিক সদিক রাশি (eigen vector) $\underline{A}$ হল সেই সদিক রাশি যার জন্য লেখা যায়,

$$Q\,\underline{A} = \lambda\,\underline{A}$$

অর্থাৎ

$$(Q - 1\lambda)\,\underline{A} = 0$$

যেখানে λ কে বলে সঠিক মান। এই সঠিক মান পাওয়া যায় সঠিক সমীকরণ

$$\det\,(Q - 1\lambda) = 0$$

সমাধান করে। সুতরাং (৭.২৫) সমীকরণের সংশ্লিষ্ট সঠিক সমীকরণ হল,

$$\det\,(T^{-1} V - 1\lambda) = 0 \qquad (৭.২৬)$$

যেখানে $\lambda = \omega^2$। সহজেই প্রমাণ করা যায় যে (৭.২৩) এবং (৭.২৬) সমীকরণের সঠিক মান একই কেননা $\det(AB) = \det A.\ \det B$। সুতরাং

$$\det\,(T^{-1} V - 1\lambda) = \det T^{-1}\,(V - T\lambda) = (\det T^{-1})\,\det\,(V - T\lambda)$$

তাই $\det T^{-1}$ শূন্য না হলে, দুটি সঠিক সমীকরণের মূল একই। এই ফলের তাৎপর্য এই যে (৭.২৩) সমীকরণকে আদর্শ রূপে প্রকাশ না করেও তার মূল নির্ধারণ করা যায়।

এখন মেট্রিক্স পদ্ধতিতে,

$$T = \tfrac{1}{2}\,\dot{\eta}^T T\,\dot{\eta} \qquad V = \tfrac{1}{2}\,\eta^T V\,\eta \qquad (৭.২৭)$$

যেখানে উপরলিখন ^{T} দিয়ে 'পক্ষান্তরিত' (transposed) নির্দেশ করা হয়েছে অর্থাৎ η^T হল সারি সদিক রাশি,

$$\eta^T = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_N)$$

এখন আমাদের কাজ হল T এবং V কে কর্ণায়িত রূপে প্রকাশ করা।

বাস্তবিকপক্ষে সাধারণভাবেই অক্ষাংশ পাওয়া যায় যার মাধ্যমে T এবং V কে কর্ণায়িত রূপে প্রকাশ করা যায়। এটিই হল প্রধান অক্ষের রূপান্তর এবং সেক্ষেত্রে যে অক্ষাংশ পাওয়া যায় তাকেই বলে সাধারণ অক্ষাংশ (normal co-ordinate)। সুতরাং যে কোন A মেট্রিক্সের মাধ্যমে আমরা একটি রূপান্তর করতে পারি যার ফলে η অক্ষাংশ পরিবর্তিত হয়ে ξ অক্ষাংশে দাঁড়ায়,

$$\eta = A\,\xi \tag{৭.২৮}$$

সুতরাং T এবং V এর পরিবর্তিত প্রকাশ হল

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}\,\dot{\xi}^{T}\,(A^{T}\,TA)\,\dot{\xi} \\ V &= \tfrac{1}{2}\,\xi^{T}\,(A^{T}\,V\,A)\,\xi \end{aligned} \tag{৭.২৯}$$

এখন T এবং V যদি কতগুলি রাশির বর্গের যোগফল হিসেবে লিখতে হয় তাহলে অবশ্যই $A^{T}\,TA$ এবং $A^{T}\,V\,A$ মেট্রিক্সদ্বয়কে কর্ণায়িত মেট্রিক্স T' এবং V' হতে হবে,

$$\begin{aligned} A^{T}\,TA &= \delta_{ij}\,t_i = T' \\ A^{T}\,VA &= \delta_{ij}\,v_i = V' \end{aligned} \tag{৭.৩০}$$

কেননা সেক্ষেত্রে (৭.২৯) সমীকরণকে লেখা যায়,

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}\,t\,\dot{\xi}^{T}\,\dot{\xi} \\ V &= \tfrac{1}{2}\,v\,\xi^{T}\,\xi \end{aligned} \tag{৭.৩১}$$

এটি করার একটি উপায় হল এমন একটি গুচ্ছ সদিক রাশি a_k নির্ধারণ করা যা T এবং V মেট্রিক্সদ্বয়ের যুগপৎ সঠিক সদিক রাশি,

$$\begin{aligned} Ta_k &= t_k\,a_k \\ Va_k &= v_k\,a_k \end{aligned} \tag{৭.৩২}$$

প্রথম সমীকরণকে v_k / t_k রাশি দিয়ে গুণ করে এবং দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে বিয়োগ করে,

$$(V - T\lambda_k)\,a_k = 0 \tag{৭.৩৩}$$

যেখানে $\lambda_k = v_k / t_k$। এটিই আমাদের পূর্বের সমীকরণ (৭.২৩)।

সুতরাং (৭.২৩) সমীকরণের সঠিক মান হল $\lambda_k = \omega_k^{2}$। (৭.৩০) সমীকরণকে $(A^{T})^{-1}$ দিয়ে গুণ করে লেখা যায়,

$$TA = T'A \qquad VA = V'A \tag{৭.৩৪}$$

যদি অবশ্য $(A^T)^{-1} = A \quad A^T = A^{-1}$

অর্থাৎ A একটি লম্ব (orthogonal) মেট্রিক্স হয়। (৭.৩৪) সমীকরণ আর (৭.৩২) সমীকরণ একই যখন A মেট্রিক্স লম্ব।

সুতরাং A মেট্রিক্সের স্তম্ভগুলি হল a_k সদিক রাশির স্তম্ভ

$$a_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

অর্থাৎ A মেট্রিক্সের উপাংশ হল a_{jk}। অতএব A মেট্রিক্স তৈরি করতে আমরা সঠিক সমীকরণ

$$\det\ (V - T\omega^2) = 0$$

সমাধান করে তার মূলগুলি ω_k নির্ধারণ করি। প্রতিটি মূলের জন্যে আমরা তার উপযোগী সঠিক সদিক রাশি a_k নির্ধারণ করি এই সমীকরণগুলি সমাধান করে,

$$\left(V - T\omega_k^2\right) a_k = 0$$

তারপর N সংখ্যক a_k সদিক রাশিগুলি নিয়ে আমরা A মেট্রিক্স তৈরি করি এবং তা থেকে সাধারণ অক্ষাংশ $\xi = A^{-1}\eta$ পাই।

উদাহরণ ১

উদাহরণস্বরূপ আমরা আবারও দুটি সংযুক্ত সুষম স্পন্দকের গতি আলোচনা করতে পারি। আমরা দুটি সমাধান পেয়েছি,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} B' \cos \omega_2 t$$

এবং $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} B \cos \omega_1 t$$

অর্থাৎ সঠিক সদিক রাশি দুটি

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{এবং} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

এই স্তম্ভদ্বয়ের আনুপাতিক। সুতরাং সাধারণ অক্ষাংশে রূপান্তর মেট্রিক্স A হল

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

এখানে $1/\sqrt{2}$ ধ্রুবক দিয়ে গুণ করা হয়েছে যাতে $|\det A| = 1$ হয়। সুতরাং $A^T = A^{-1} = A$। এখন সাধারণ অক্ষাংশ ξ_1 এবং ξ_2 হল

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

অর্থাৎ

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \qquad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$$

সেক্ষেত্রে

$$T = \tfrac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2} m \dot{x}_2^2 = \tfrac{1}{2} m (\dot{\xi}^2 + \dot{\xi}^2)$$

এবং

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{2} k \tfrac{1}{2} (\xi_1 + \xi_2)^2 + \tfrac{1}{2} k \tfrac{1}{2} (\xi_1 - \xi_2)^2 + k\xi_1^2 \\ &= \tfrac{1}{2} k \xi_2^2 + \tfrac{3}{2} k \xi_1^2 \end{aligned}$$

সুতরাং

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) - \frac{3k}{2}\xi_1^2 - \tfrac{1}{2} k \xi_2^2$$

এবং গতিসমীকরণ হল,

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}_1 + 3k\xi_1 &= 0 \\ m\ddot{\xi}_2 + k\xi_2 &= 0 \end{aligned}$$

যার সমাধান

$$\xi_1 = A\cos(\omega_1 t + \epsilon_1) \qquad \xi_2 = A\cos(\omega_2 t + \epsilon_2)$$

যেখানে $\omega_1 = \sqrt{3k/m}$ এবং $\omega_2 = \sqrt{k/m}$ হল সাধারণ স্পন্দনসংখ্যা।

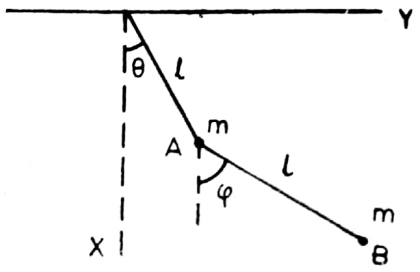
উদাহরণ ২

একটি যুগ্ম দোলকের হাল্কা অপ্রসারণযোগ্য দণ্ডের দৈর্ঘ্য 2l যার একদিক আটকানো এবং অন্য দিকে একটি m ভরের বস্তু ঝুলানো আছে আর তার মধ্য

বিন্দু দিয়ে m ভরবিশিষ্ট আর একটি বস্তু ঝুলানো। যদি যুগ্ম দোলকটি সব সময়ে উল্লম্ব তলে থাকে তবে দেখাও যে তার সাধারণ স্পন্দনসংখ্যা হল

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\ \sqrt{2\pm\sqrt{2}}$$

সমাধান :



চিত্র : ৭.২

৭.২ চিত্র থেকে

A বিন্দুর অক্ষাংশ $= (l\cos\theta,\ l\sin\theta)$

B বিন্দুর অক্ষাংশ $= [l(\cos\theta+\cos\varphi),\ 2(\sin\theta+\sin\varphi)]$

সুতরাং A বিন্দুতে m ভরের গতিশক্তি,

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

এবং B বিন্দুতে m ভরের গতিশক্তি

$$= \tfrac{1}{2}ml^2\left[(\sin\theta\dot{\theta}+\sin\varphi\dot{\varphi})^2+(\cos\theta\dot{\theta}+\cos\varphi\dot{\varphi})^2\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2+2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi))$$

যদি কোণগুলি ছোট হয় তাহলে B বিন্দুর ভরের গতিশক্তি লেখা যায়,

$$\tfrac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2$$

ভরদুটির বিভবশক্তি হল যথাক্রমে $-mgl\cos\theta$ এবং $-mgl(\cos\theta+\cos\varphi)$।
সুতরাং লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হল

$$L = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2+\frac{m}{2}l^2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2+2mgl\cos\theta+mgl\cos\varphi$$

অতএব গতিসমীকরণ পাওয়া যায়,

$$ml^2\ddot{\theta} + ml^2(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}) + 2mgl\sin\theta = 0$$

$$ml^2(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}) + mgl\sin\varphi = 0$$

যেহেতু বিচ্যুতি-কোণ দুটি ক্ষুদ্র তাই লেখা যায়,

$$2\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + \frac{2g}{l}\theta = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

এখন পর্যায়বৃত্তের সমাধান লিখে

$$\theta = Ae^{i\omega t} \qquad \varphi = Be^{i\omega t}$$

আমরা পাই,

$$-2\omega^2 A - \omega^2 B + \frac{2g}{l}A = 0$$

$$-\omega^2 B - \omega^2 A + \frac{g}{l}B = 0 \qquad (৭.৩৫)$$

সুতরাং নির্ণায়ক সমীকরণ পাওয়া যায়,

$$\begin{vmatrix} -2\omega^2 + \frac{2g}{l} & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2 + \frac{g}{l} \end{vmatrix} = 0$$

সমাধান করে,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

যখন $\omega = \omega_1$, (৭.৩৫) সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,

$$\sqrt{2}A - B = 0$$

সুতরাং এক্ষেত্রে

$$\varphi = \sqrt{2}\theta$$

একইভাবে যখন $\omega = \omega_2$,

$$\sqrt{2}\,A + B = 0$$

এবং

$$\varphi = -\sqrt{2}\,\theta$$

অতএব দুইক্ষেত্রে সঠিক সদিক রাশি হল

$$\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix} \quad \text{এবং} \quad \begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

সাধারণ সমাধান তাই লেখা যায়,

$$\theta = A\cos(\omega_1 t + \epsilon_1) + B\cos(\omega_2 t + \epsilon_2)$$
$$\varphi = \sqrt{2}\,A\cos(\omega_1 t + \epsilon_1) - \sqrt{2}\,B\cos(\omega_2 t + \epsilon_2)$$

প্রথমটি প্রতিসম এবং দ্বিতীয়টি বি-প্রতিসম সমাধান।
আবার মেট্রিক্স A লেখা যায়,

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

সুতরাং

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1\\ \sqrt{2} & -1\end{pmatrix}$$

অতএব রূপান্তরিত অক্ষাংশ হল

$$\begin{pmatrix}\theta'\\ \varphi'\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix}$$

অর্থাৎ

$$\theta' = \sqrt{2}\,\theta + \varphi \qquad \varphi' = \sqrt{2}\,\theta - \varphi$$

অথবা

$$\theta' = 2\sqrt{2}\,A\cos(\omega_1 t + \epsilon_1)$$
$$\varphi' = 2\sqrt{2}\,B\cos(\omega_2 t + \epsilon_2)$$

এই দুটি হল সাধারণ বা নর্মাল অক্ষাংশ।

প্রশ্নমালা

১। একটি অণুর নক্সা হল এই যে M ভরের একটি পরমাণুর দু'পাশে m ভরের দুটি পরমাণু প্রতিসাম্য বজায় রেখে রৈখিকভাবে সমান দূরত্বে স্থাপন করা হয়েছে। পরমাণুর পারস্পরিক বলের স্থিতিস্থাপকতার ধ্রুবক যদি μ হয় তবে দেখাও যে মূল স্পন্দনসংখ্যা হল

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\mu/m}, \quad \omega_3 = \sqrt{\mu(M+2m)/Mm}$$

এই অণুর মূল অক্ষাংশ নির্ধারণ কর।

২। একটি বস্তুনিচয়ে m ভরের তিনটি বস্তুকণা আছে যারা সমান্তরাল তলে পরস্পর থেকে l দূরত্বে অবস্থিত এবং একটি সামগ্রিক 4l দৈর্ঘ্যের প্রসারণহীন পাতলা তার দিয়ে তারা আবদ্ধ। তারটির দুদিক স্থির এবং তার টান হল P। দেখাও যে ক্ষুদ্র কম্পনের পর্যায়কাল হল $2\pi/p$ যেখানে

$$p^2 = 2P/ml$$

অথবা

$$p^2 = (2 \pm \sqrt{2})\, P/ml$$

৩। একটি সুষম দণ্ড AB'র ভর 2m এবং দৈর্ঘ্য 2a। তার A বিন্দুগামী সমান্তরাল তলে দণ্ডটি মুক্তভাবে ঘুরতে পারে। একটি হাল্কা স্থিতিস্থাপক তার দণ্ডের B বিন্দুতে আটকানো আছে এবং তারটি দিয়ে একটি m ভরের বস্তুকণা ঝুলানো আছে। যখন এই বস্তুনিচয় স্থায়ী স্থিতাবস্থায় থাকে তখন তারের দৈর্ঘ্য 4a/3 এবং তার প্রসারণ ϵ। যদি AB'র মধ্যে দিয়ে যাওয়া উল্লম্ব তলে বস্তুনিচয়টি ক্ষুদ্র কম্পন সম্পন্ন করে, তাহলে নিম্নমুখী উল্লম্বের সঙ্গে দণ্ড এবং তার যথাক্রমে θ এবং φ কোণ করে এবং তারের দৈর্ঘ্য হয় $\frac{4}{3}a + x$। দেখাও যে x, $\varphi + 2\theta$ এবং $2\varphi - 3\theta$ হল বস্তুনিচয়ের মূল অক্ষাংশ এবং তার সমতুল সরল দোলকের দৈর্ঘ্য হল ϵ, $\frac{8}{3}a$ এবং $\frac{a}{3}$।

অষ্টম অধ্যায়

হ্যামিল্টনীয় গতিসমীকরণ

নিউটনীয় গতিবিজ্ঞানের মূল ধারণাগুলিকে অয়লার-লাগ্রাঞ্জ গতিসমীকরণের মাধ্যমে সুসংহতভাবে প্রকাশ করা যায় এবং লাগ্রাঞ্জের পদ্ধতি আপেক্ষিকতত্ত্বসম্মত গতিবিজ্ঞানেও সহজেই ব্যবহার করা যায়। অন্যদিকে গতিবিজ্ঞানের হ্যামিল্টনীয় পদ্ধতি একটি বিকল্প পদ্ধতি যা পরিসংখ্যান বিজ্ঞান এবং কোয়ান্টাম গতিবিজ্ঞানের বিকাশের জন্য অপরিহার্য। যদিও লাগ্রাঞ্জীয় এবং হ্যামিল্টনীয় পদ্ধতির মধ্যে একই পদার্থবিজ্ঞানের ধারণাসমূহ অন্তর্ভুক্ত তবু প্রাগ্রসর বিকাশের জন্য হ্যামিল্টনীয় পদ্ধতি সহজতর কেননা এই পদ্ধতিতে সাধারণীকৃত অক্ষাংশ এবং সাধারণীকৃত ভরবেগ একই পর্যায়ে নিয়ে আসা হয়।

৮·১ হ্যামিল্টনের অপেক্ষক

আমরা জানি যে কোন বস্তু-নিচয়ের লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক L তার সাধারণীকৃত অক্ষাংশ q_i, সাধারণীকৃত গতিবেগ $\dot{q}_i$ এবং সময়ের উপর নির্ভরশীল ($i = 1, 2, \ldots, n$ যেখানে n হল বস্তুনিচয়ের স্বাধীনতার-মাত্রা)।

সুতরাং

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t) \qquad (৮.১)$$

এই অপেক্ষকের সময় সাপেক্ষে সামগ্রিক অন্তরকলন হল,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \qquad (৮.২)$$

যেখানে যোগের রীতি ব্যবহার করা হয়েছে অর্থাৎ কোন সূচক পুনরাবৃত্ত হলে সেই সূচকের উপর সমষ্টিকরণ প্রতীক Σ উহ্য রাখা হয়েছে বুঝতে হবে।
এখন অয়লার-লাগ্রাঞ্জ গতিসমীকরণ

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

ব্যবহার করে আমরা লিখতে পারি,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

$$= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

সুতরাং

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (৮.৩)$$

যদি লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক সময়ের উপর প্রত্যক্ষভাবে নির্ভরশীল না হয় তাহলে

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

এবং সেক্ষেত্রে,

$$\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{ধ্রুব রাশি} \qquad (৮.৪)$$

এই পর্যায়ে আমরা সাধারণীকৃত ভরবেগের সংজ্ঞা দিতে পারি,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (৮.৫)$$

এবং তা ব্যবহার করে আমরা পাই

$$\dot{q}_i p_i - L = \text{ধ্রুব রাশি} \qquad (৮.৬)$$

সুতরাং আমরা একটি বিশেষ অপেক্ষক পাই,

$$H = \dot{q}_i p_i - L \qquad (৮.৭)$$

যা গতির জন্য ধ্রুবক, যদি অবশ্য লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক সময়ের উপর নির্ভরশীল না হয়। এই নতুন অপেক্ষক H কে হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক বলে।

আসলে (৮.৭) সমীকরণ হল গণিতের 'লেজেন্ডার রূপান্তরের' একটি সুন্দর উদাহরণ। লেজেন্ডারের রূপান্তর পদ্ধতি ব্যাখ্যা করার জন্যে আমরা দুটি পরিবর্তী রাশি নির্ভর একটি অপেক্ষক $f(x, y)$ নিতে পারি যার প্রকৃত অন্তরকলন হল,

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$$

$$= u\,dx + v\,dy \qquad (৮.৮)$$

যেখানে

$$u = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \quad \text{এবং} \quad v = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$$

অর্থাৎ একবার y-কে স্থির রেখে এবং আর একবার x-কে স্থির রেখে f-এর আংশিক অন্তরকলন হল u এবং v। এখন (x, y) পরিবর্তী রাশির বদলে আমরা নতুন দুটি পরিবর্তী রাশি (u, y) বিবেচনা করতে চাই। একটি নতুন অপেক্ষকের সংজ্ঞা দেয়া যায়,

$$g = f - ux \qquad (৮.৯)$$

যার প্রকৃত অন্তরকলন হল,

$$dg = df - u\,dx - x\,du$$

$$= -x\,du + v\,dy$$

(৮.৮) সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে বলা যায় যে g প্রত্যাশিত প্রকৃতির অপেক্ষক অর্থাৎ g (u, y) বাস্তবিকই u এবং y পরিবর্তী রাশির অপেক্ষক এবং উপরের সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u} \qquad v = \frac{\partial g}{\partial y}$$

তাপগতিবিদ্যায় লেজেন্ডার রূপান্তর বহুল ব্যবহৃত। উদাহরণস্বরূপ, এনথ্যালপি অপেক্ষক **X** হলে এন্ট্রপি S এবং চাপ P রাশির অপেক্ষক $\mathbf{X} = \mathbf{X}(S, P)$। সুতরাং

$$d\mathbf{X} = \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial S}\right)_P dS + \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial P}\right)_S dP = \mathbf{T}\,dS + \mathbf{V}\,dP$$

যেখানে

$$\mathbf{T} = \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial S}\right)_P \quad \text{এবং} \quad \mathbf{V} = \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial P}\right)_S$$

আমরা এখন লেজেন্ডার রূপান্তরের মাধ্যমে অন্য একটি অপেক্ষক গিব্‌স-এর মুক্ত শক্তি অপেক্ষক G সঞ্জায়িত করতে পারি যা তাপমাত্রা T এবং চাপ P এর অপেক্ষক। সুতরাং

$$G = G(T.P) = X - ST$$

এবং

$$dG = dX - T\,dS - S\,dT = -S\,dT + V\,dP$$

অতএব

$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P \quad \text{এবং} \quad V = \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T$$

সুতরাং (৮.৯) সমীকরণের মতো লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ কে অন্য একটি অপেক্ষক $H(q_i, p_i, t)$ তে লেজেণ্ডার রূপান্তর করা যায়,

$$-H(q_i, p_i, t) = L - p_i \dot{q}_i$$

এখানে ঋণাত্মক চিহ্নটি প্রচলিত নীতি অনুসারে নেয়া হয়েছে কেননা এই সংজ্ঞার মাধ্যমেই H অপেক্ষককে সামগ্রিক শক্তি হিসেবে উপস্থাপন করা যায়।

অতএব হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক H সাধারণীকৃত অক্ষাংশ q_i, ভরবেগ p_i এবং সময়ের অপেক্ষক,

$$H = H(q_i, p_i, t)$$

এর প্রকৃত অন্তরকলন হল,

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i}\,dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\,dp_i + \frac{\partial H}{\partial t}\,dt \qquad (৮.১০)$$

কিন্তু (৮.৭) সমীকরণ থেকে,

$$dH = p_i\,d\dot{q}_i + \dot{q}_i\,dp_i - dL$$

$$= p_i\,d\dot{q}_i + \dot{q}_i\,dp_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\,dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}\,dt\right)$$

(৮.৫) সমীকরণ ব্যবহার করে,

$$dH = \dot{q}_i\,dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\,dq_i - \frac{\partial L}{\partial t}\,dt$$

এবং অয়লার-লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ লেখা যায়,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} p_i$$

সুতরাং

$$dH = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (৮.১১)$$

(৮.১০) এবং (৮.১১) সমীকরণদ্বয় তুলনা করে,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (৮.১২)$$

এই সমীকরণগুলিকে হ্যামিল্টনের আইনানুগ (canonical) সমীকরণ বলে এবং q_i, p_i পরিবর্তী রাশিগুলিকে আইনানুগ পরিবর্তী রাশি বলে। লক্ষ্য করা দরকার যে আইনানুগ পরিবর্তী রাশির গতিসমীকরণ

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (৮.১৩)$$

মোট 2n সংখ্যক প্রথম ঘাতের অন্তরকলন সমীকরণ। এর সঙ্গে লাগ্রাঞ্জের দ্বিতীয় ঘাতের সমীকরণের তুলনা করা যায়। আইনানুগ শব্দের অর্থ হল যে হ্যামিল্টনীয় সমীকরণের আইনসম্মত আদর্শ রূপ এটাই।

৮.২ হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষকের ভৌত তাৎপর্য

সংরক্ষণশীল বস্তুনিচয়ের ক্ষেত্রে আমরা একটি বিভব অপেক্ষক V এর সংজ্ঞা দিতে পারি যা শুধু সাধারণীকৃত অক্ষাংশের উপর নির্ভরশীল এবং তাই গতি-বেগের সাপেক্ষে তার অন্তরকলন শূন্য,

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

সুতরাং

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \qquad (৮.১৪)$$

যেখানে T হল গতিশক্তি, $T = \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$ । সাধারণভাবে x_i থেকে q_i রাশিতে পরিবর্তনের জন্যে লেখা যায়,

$$x_i = x_i (q_j, t) \qquad (৮.১৫)$$

সুতরাং

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

এবং

$$T = \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + b_j \dot{q}_j + c \qquad (৮.১৬)$$

যেখানে

$$a_{jk} = m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

$$b_j = m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$c = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2$$

(৮.১৫) সমীকরণে x_i যদি সময়ের উপর প্রত্যক্ষভাবে নির্ভরশীল না হয় তাহলে b_j এবং c শূন্য এবং সেক্ষেত্রে T হল সাধারণীকৃত গতিবেগের সুষম দ্বিঘাত অপেক্ষক,

$$T = \frac{1}{2} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

কিন্তু যদি কোন সুষম অপেক্ষক f পরিবর্তী-রাশি x_i-এর n মাত্রার অপেক্ষক হয় তবে অয়লারের উপপাদ্য অনুসারে,

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf$$

যা সহজেই প্রমাণ করা যায়। উদাহরণস্বরূপ, ধরা যাক f অপেক্ষক পরিবর্তী রাশি x_i এর দ্বিঘাত অপেক্ষক, অর্থাৎ

$$f = \frac{1}{2} a_{jk} x_j x_k$$

সেক্ষেত্রে অন্তরকলন করে,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{ik} x_k$$

এবং তাই

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{ik} x_i x_k = 2f$$

অয়লারের এই উপপাদ্য ব্যবহার করে আমরা T অপেক্ষকের জন্য লিখতে পারি,

$$\dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T \qquad (৮.১৭)$$

কেননা T অপেক্ষক $\dot{q}_i$-এর দ্বিঘাত অপেক্ষক। সুতরাং (৮.১৪) সমীকরণ ব্যবহার করে,

$$H = \dot{q}_i p_i - L = \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - L = 2T - (T - V)$$

$$= T + V = E \qquad (৮.১৮)$$

অর্থাৎ হ্যামিলটনীয় অপেক্ষক সামগ্রিক শক্তির সমান।

লক্ষ্য করা দরকার যে এখানে দুটি অনুমানের আশ্রয় নেয়া হয়েছে: (১) বস্তুনিচয় সংরক্ষণশীল যার ফলে বিভবশক্তির সংজ্ঞা দেয়া যায় এবং (২) স্থানাঙ্ক রূপান্তর সময়ের উপর নির্ভরশীল নয় যার ফলে গতিশক্তি একটি সুষম দ্বিঘাত অপেক্ষক। দ্বিতীয় অনুমানের তাৎপর্য হল এই যে মহাকাশে এই স্থানাঙ্ক স্থির বলে ধরে নেয়া হয়েছে। এই দুটি অনুমান যথেষ্ট কিন্তু প্রয়োজনীয় নয় যা দিয়ে H এবং E এর অভিন্নতা প্রমাণ করা যায়। বিদ্যুৎ-চৌম্বক ক্ষেত্রের ব্যাপারে দেখানো যায় যে দ্বিতীয় অনুমানের প্রয়োজন হয় না। সহজতম উদাহরণ হল একমাত্রিক সরল সুষম স্পন্দক যার গতিশক্তি এবং বিভবশক্তি হল যথাক্রমে $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ এবং $V = \frac{1}{2} kx^2$। সুতরাং লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হল,

$$L = \frac{1}{2}(m \dot{x}^2 - kx^2)$$

যা থেকে x এর আনুষঙ্গিক ভরবেগ p পাওয়া যায়,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

সুতরাং হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক হল,

$$H = \dot{x}p - L = \frac{1}{2m} p^2 + \tfrac{1}{2} kx^2 = T + V = E \qquad (৮.১৯)$$

এবং হ্যামিল্টনীয় গতিসমীকরণ হল

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

যার থেকে পাওয়া যায়

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \qquad \dot{p} = -kx$$

এই দুটি সমীকরণ একত্র করে

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

যার সমাধান হল প্রত্যাশিত সরল দোলকের সমীকরণ,

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad \omega = \sqrt{k/m}$$

এরপর আমরা কেন্দ্রীয় বল $V(r)$-এর অধীনে একটি বস্তুকণার গতি আলোচনা করতে পারি। যেহেতু উক্ত গতি একটি দ্বিমাত্রিক তলে তাই মেরুবর্তী স্থানাঙ্ক (r, θ) নেয়া যায়, যেখানে

$$T = \tfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \qquad V = V(r)$$

সুতরাং

$$L = \tfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

এবং তাই

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

অতএব এক্ষেত্রে হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক হল

$$H = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta - L = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2\right) + V(r) \qquad (৮.২০)$$

এখন হ্যামিল্টনীয় গতিসমীকরণ সহজেই পাওয়া যায়,

$$\left.\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{1}{m} p_r \qquad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{1}{mr^2} p_\theta \\ \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{mr^3} p_\theta^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \qquad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (৮.২১)$$

সুতরাং $p_\theta = mr^2\dot{\theta} =$ ধ্রুব রাশি $= l$

এবং তাই তৃতীয় সমীকরণ থেকে,

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{l^2}{mr^3} \quad (৮.২২)$$

এইভাবে গতিসমীকরণ পাওয়া যায়,

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r)$$

যেখানে $f(r)$ হল কেন্দ্রীয় বল। এই সমীকরণ নিয়ে কেন্দ্রীয় বলের অধ্যায়ে আলোচনা করা হয়েছে (৪র্থ অধ্যায়)।

সময়ের উপর নির্ভরশীল হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষকের উদাহরণ হিসেবে আমরা বিদ্যুৎ-চৌম্বক ক্ষেত্রে একটি আধানযুক্ত বস্তুকণার গতি আলোচনা করতে পারি। বস্তুকণার আধান e হলে তার উপর বলের পরিমাণ হল,

$$\underline{F} = e\left(\underline{E} + \frac{1}{c}\,\underline{v} \times \underline{B}\right) \quad (৮.২৩)$$

যেখানে $\underline{E}$ হল বিদ্যুৎ-ক্ষেত্রের প্রাখর্য, $\underline{B}$ চৌম্বক আবেশ সদিক রাশি এবং $\underline{V}$ বস্তুকণার গতিবেগ। ধরা যাক লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক লেখা যায়,

$$L(\underline{x}, \underline{v}, t) = \tfrac{1}{2} m \underline{v}^2 - U(x, \underline{v}, t) \quad (৮.২৪)$$

যেখানে U অপেক্ষক অবস্থান $\underline{x}$, গতিবেগ $\underline{v}$ এবং সময় t এর উপর নির্ভরশীল। সুতরাং অয়লার-লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ থেকে,

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{v}}\right) = -\frac{\partial U}{\partial \underline{x}} - \frac{d}{dt}(m\underline{v}) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \underline{v}}\right) = 0$$

অতএব

$$m\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} = -\underline{\nabla}U + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \underline{v}} \qquad (৮.২৫)$$

কিন্তু অন্যদিকে (৮.২৩) সমীকরণ ব্যবহার করে,

$$m\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} = e\left(\underline{E} + \frac{1}{c}\underline{v}\times\underline{B}\right)$$

এখন আমরা বিদ্যুৎ-চৌম্বক ক্ষেত্রের নির্দিক এবং সদিক বিভব φ এবং $\underline{A}$ ব্যবহার করতে পারি,

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$$

$$\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}$$

কিন্তু

$$\underline{v}\times\underline{B} = \underline{v}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A}) = \underline{\nabla}(\underline{v}\cdot\underline{A}) - \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{A}$$

সুতরাং

$$m\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} = e\left[-\underline{\nabla}\left(\varphi - \frac{1}{c}\underline{v}\cdot\underline{A}\right) - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\underline{A}\right]$$

কেননা $\underline{A}$ শুধু $\underline{x}$ এর উপর নির্ভরশীল এবং তাই

$$\frac{d}{dt}\underline{A} = \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial \underline{x}}\cdot\frac{\partial \underline{x}}{\partial t} = \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{A}$$

একই কারণে,

$$m\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} = e\left[-\underline{\nabla}\left(\varphi - \frac{1}{c}\underline{v}\cdot\underline{A}\right) - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \underline{v}}(\underline{v}\cdot\underline{A})\right]$$

$$= e\left[-\underline{\nabla}\left(\varphi - \frac{1}{c}\underline{v}\cdot\underline{A}\right) + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \underline{v}}\left(\varphi - \frac{1}{c}\underline{v}\cdot\underline{A}\right)\right]$$

অতএব (৮.২৫) সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে,

$$U = e\left(\varphi - \frac{1}{c}\underline{v}\cdot\underline{A}\right) \qquad (৮.২৬)$$

এবং লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হল

$$L = \tfrac{1}{2} m \underline{v}^2 - e\varphi + \frac{e}{c} \underline{v} \cdot \underline{A} \qquad (৮.২৭)$$

সুতরাং এক্ষেত্রে ভরবেগ সদিক রাশি হল,

$$\underline{p} = \frac{\partial L}{\partial \underline{v}} = m \underline{v} + \frac{e}{c} \underline{A}$$

এবং তাই হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক হল

$$H = \underline{v} \cdot \underline{p} - L = \frac{1}{m} \left(\underline{p} - \frac{e}{e} \underline{A} \right) \cdot \underline{p} - L$$

$$= \frac{1}{2m} \left(\underline{p} - \frac{e}{c} \underline{A} \right)^2 + e\varphi \qquad (৮.২৮)$$

এটাই বস্তুকণার সামগ্রিক শক্তি। সুতরাং বিদ্যুৎ-চৌম্বক ক্ষেত্রে হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক লেখার জন্যে $\underline{p}$ এর জায়গায় $\underline{p} - \frac{e}{c} \underline{A}$ লেখার প্রয়োজন হয়।

৮·৩ বিভিন্ন স্থানাঙ্কে হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক

(ক) কার্টেশীয় স্থানাঙ্ক (x, y, z) :

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) \qquad (৮.২৯)$$

(খ) বেলনাকৃতি স্থানাঙ্ক (ρ, φ, z) :

$$T = \tfrac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) \qquad V = v(\rho, \varphi, z)$$

সুতরাং

$$L = \tfrac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V(\rho, \varphi, z)$$

এবং (৮.৫) সমীকরণ থেকে

$$p_\rho = m\dot{\rho}^2, \quad p_\varphi = m\rho^2 \dot{\varphi}, \quad p_z = m\dot{z}$$

অতএব (৮.৭) সমীকরণ থেকে

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} p_\varphi^2 + p_z^2 \right) + V(\rho, \varphi, z) \qquad (৮.৩০)$$

(গ) বর্তুলাকার মেরুবর্তী স্থানাঙ্ক (r, θ, φ) :

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) \quad V = V(r, \theta, \varphi)$$

অতএব

$$p_r = m\dot{r} \qquad p_\theta = mr^2\dot{\theta} \qquad p_\varphi = mr^2 \sin^2\theta\,\dot{\varphi}$$

সুতরাং

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\,p_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,p_\varphi^2\right) + V(r, \theta, \varphi) \quad (৮.৩১)$$

(গ) ঘূর্ণায়মান স্থানাঙ্ক

ধরা যাক $S(x, y, z)$ স্থানাঙ্কে z-অক্ষের চারপাশে $S'(x', y', z')$ স্থানাঙ্ক ω কৌণিক গতিবেগে গতিশীল। সুতরাং দুই স্থানাঙ্কের অক্ষাংশের রূপান্তর সমীকরণ হল,

$$x = x' \cos\omega t - y' \sin\omega t$$

$$y = x' \sin\omega t + y' \cos\omega t$$

$$z' = z$$

অতএব কোন বস্তুকণার গতিশক্তি হল,

$$T = \tfrac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}m\left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2\right) + m\omega\left(x'\dot{y}' - \dot{x}'y'\right) + \tfrac{1}{2}m\omega^2\left(x'^2 + y'^2\right)$$

সুতরাং

$$p'_x = m\left(\dot{x}' - \omega y'\right)$$

$$p'_y = m\left(\dot{y}' + \omega x'\right)$$

$$p'_z = m\dot{z}'$$

অতএব (৮.৭) সমীকরণ থেকে

$$H' = \frac{1}{2m}\left(p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2\right) + \omega\left(p'_x y' - p'_y x'\right) + V$$

যদি বিভবশক্তি V ধ্রুব হয় তাহলে (৮.১৩) সমীকরণ থেকে হ্যামিল্টনীয় গতি-সমীকরণ লেখা যায়,

$$\dot{p}'_x = -\frac{\partial H}{\partial y'} = \omega p'_y \qquad \dot{x}' = \frac{1}{m} p'_x + \omega y'$$

$$\dot{p}'_y = -\omega p'_x \qquad \dot{y}' = \frac{1}{m} p'_y - \omega x'$$

$$\dot{p}'_z = 0 \qquad \dot{z}' = \frac{1}{m} p'_z$$

সুতরাং

$$\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x' = 0$$

$$\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y' = 0$$

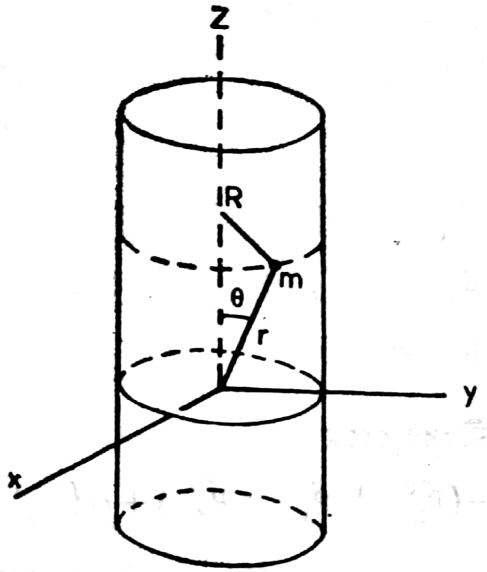
সদিক রাশির সমীকরণ হিসেবে লেখা যায়,

$$\ddot{\underline{x}}' - 2\,\underline{\omega} \times \underline{v}' - \omega^2\,\underline{x} = 0 \qquad (৮.৩২)$$

এই সমীকরণ থেকেও করিওলিস ত্বরণের $-2\underline{\omega} \times \underline{v}'$ অস্তিত্ব প্রমাণিত হয়।

উদাহরণ ১

একটি m ভরবিশিষ্ট বস্তুকণা একটি চোঙের পৃষ্ঠতলে ঘোরে। তার হ্যামিল্টনীয় গতিসমীকরণ নির্ধারণ কর।



চিত্র : ৮.১

সমাধান : চোঙ বা বেলনের সমীকরণ হল

$$x^2 + y^2 = R^2$$

বস্তুকণার উপর বল মূলবিন্দু অভিমুখী এবং মূলবিন্দু থেকে দূরত্বের সমানুপাতিক,

$$\underline{F} = -k\,\underline{r}$$

সুতরাং বিভবশক্তি হল

$$V = \tfrac{1}{2}kr^2 = \tfrac{1}{2}k\,(x^2 + y^2 + z^2) = \tfrac{1}{2}k\,(R^2 + z^2)$$

বেলনাকার স্থানাঙ্কে গতিবেগ হল

$$v^2 = \dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2$$

এবং যেহেতু R ধ্রুব,

$$v^2 = R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2$$

সুতরাং গতিশক্তি হল,

$$T = \tfrac{1}{2}m\,(R\,\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

অতএব লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক লেখা যায়,

$$L = \tfrac{1}{2}m\,(R^2\,\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \tfrac{1}{2}k\,(R^2 + z^2)$$

সুতরাং সাধারণীকৃত ভরবেগ হল,

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

অতএব হ্যামিলটনীয় অপেক্ষক লেখা যায়,

$$H = mR^2\dot{\theta}^2 + m\dot{z}^2 - \tfrac{1}{2}m\,(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \tfrac{1}{2}k\,(R^2 + z^2)$$

$$= \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \tfrac{1}{2}kz^2 + \tfrac{1}{2}kR^2$$

সুতরাং গতিসমীকরণ হল,

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \qquad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz \qquad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$$

অতএব প্রথম দুটি সমীকরণ থেকে

$$p_\theta = mR^2\dot{\theta} = \text{ধ্রুবক}$$

এবং দ্বিতীয় দুটি থেকে

$$\dot{p}_z = m\ddot{z} = -kz$$

অতএব গতিসমীকরণ হল

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 \qquad \omega = \sqrt{k/m}$$

অর্থাৎ বস্তুকণার গতি হল z-অক্ষরেখার দিকে সরল স্পন্দকের গতি যার কৌণিক স্পন্দনসংখ্যা হল ω।

৮·৪ হ্যামিল্টনের পরিমার্জিত পরিবর্তন নীতি

আমরা জানি যে লাগ্রাঞ্জীয় পদ্ধতিতে অয়লার-লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ হ্যামিল্টনের সর্বনিম্ন কার্যক্রমের নীতি থেকে পাওয়া যায়। কার্যক্রমের সংজ্ঞা দেয়া হয় নিম্নলিখিত সমাকলন দিয়ে,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i; t)\, dt \qquad (৮.৩৩)$$

হ্যামিল্টনের পরিবর্তনের নীতি অনুসারে এই সমাকলনের মান প্রান্তিক (সর্বোচ্চ অথবা সর্বনিম্ন) হবে,

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt = 0 \qquad (৮.৩৪)$$

এবং তা হবে এই শর্তাধীনে যে প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে পরিবর্তন শূন্য।

পরিবর্তন পদ্ধতি প্রয়োগ করে আমরা পাই,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) dt = 0$$

যেখানে পরিবর্তনগুলি একটি রাশি α-এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হয় যা সমাকলনের সব বিন্দুতে একই অর্থাৎ

$$\delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\delta\alpha = \eta_i\,\delta\alpha$$

যেহেতু δq_i এবং $\delta \dot{q}_i$ পরস্পর নিরপেক্ষ নয়, তাই

$$\delta \dot{q}_i = \delta\left(\frac{dq}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\delta q_i$$

এটা ব্যবহার করে এবং একটি আংশিক সমাকলনের পর আমরা পাই,

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i\,dt = 0 \qquad (৮.৩৫)$$

যেখানে আংশিক সমাকলনের সমাকলিত অংশ শূন্য কেননা প্রান্তবিন্দুতে পরিবর্তন δq_i শূন্য। (৮.৩৫) সমীকরণ থেকে আমরা অয়লার-লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ পাই। এখন একই পরিবর্তন নীতি থেকে আমরা হ্যামিল্টনের গতিসমীকরণ পাই যদি (৮.৩৪) সমীকরণে আমরা L অপেক্ষকের স্থলে $p_i\dot{q}_i - H(q_i, p_i, t)$ অপেক্ষক নেই এবং p_i, q_i উভয়কে স্বতন্ত্র পরিবর্তী রাশি হিসেবে বিবেচনা করি। সুতরাং হ্যামিল্টনের পরিমার্জিত পরিবর্তন নীতি হল,

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2}(p_i\dot{q}_i - H)\,dt = 0 \qquad (৮.৩৬)$$

যেখানে H হল p_i, q_i ও t এর অপেক্ষক এবং

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

(৮.৩৫) সমীকরণ নির্ধারণের সময় $\dot{q}_i$ এর পরিবর্তনকে q_i এর পরিবর্তনের উপর নির্ভরশীল নেয়া হয়েছে, $\delta\dot{q}_i = d(\delta q_i)/dt$। কিন্তু এখন p_i এবং q_i উভয়ের পরিবর্তনকে পরস্পর নিরপেক্ষ নেয়া হবে। আগের মতোই এ ধরনের পরিবর্তন α

রাশির উপর নির্ভরশীল করে আমরা পাই,

$$\delta q_i = \eta_i \, \delta\alpha \qquad \delta p_i = \zeta_i \, \delta\alpha$$

যেখানে η_i এবং ζ_i এর মান অবাধ কিন্তু প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে তারা শূন্য,

$$\eta_i(t_1) = \eta_i(t_2) = \zeta_i(t_1) = \zeta_i(t_2) = 0$$

সুতরাং (৮.৩৬) সমাকলনের পরিবর্তনের জন্যে আমরা পাই,

$$\delta\alpha \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \dot{q}_i + p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) dt = 0$$

দ্বিতীয় অংশটিকে আংশিক সমাকলন করে পাওয়া যায়,

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \, dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \eta_i \, dt$$

যেখানে সমাকলিত অংশ প্রান্তিকমানের জন্য শূন্য। সুতরাং

$$\delta\alpha \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \zeta_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \eta_i \right\} dt = 0$$

যেখানে বর্তমান ক্ষেত্রে ζ_i এবং η_i পরস্পর নিরপেক্ষ পরিবর্তন, তাই আমরা পাই

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (৮.৩৭)$$

এগুলিই হ্যামিল্টনের গতিসমীকরণ। সুতরাং হ্যামিল্টনের পরিমার্জিত পরিবর্ত নীতির মাধ্যমে হ্যামিল্টনের গতিসমীকরণ সাধারণভাবে নির্ধারণ করা যায় যেখা লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষকের প্রয়োজন হয় না। লাগ্রাঞ্জীয় এবং হ্যামিল্টনীয় পদ্ধতির মৌলিক পার্থক্য লক্ষ্য করা প্রয়োজন। লাগ্রাঞ্জীয় পদ্ধতিতে সাধারণীকৃত স্থা q_i হল স্বতন্ত্র পরিবর্তী রাশি এবং গতিবেগ $\dot{q}_i$ তার উপর নির্ভর করে।

হ্যামিল্টনীয় পদ্ধতিতে ভরবেগ রাশিগুলিও p_i স্বতন্ত্র পরিবর্তী রাশির মর্যাদায় উন্নীত হয়েছে। অবশ্য এই দুই পদ্ধতির কোনটিকে মৌলিকতর বলা যায় না। উভয়ের ভৌত আধেয় একই।

৮.৫ মেট্রিক্স আকারে হ্যামিল্টনের গতিসমীকরণ

হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক $H(q_i, p_i, t)$ নির্ধারণ করার জন্যে এক পর্যায়ে সমীকরণ সমাধান করে q_i, p_i এবং t রাশির অপেক্ষক হিসেবে $\dot{q}_i$ নির্ণয় করতে হয়। পরিবর্তী রাশির সংখ্যা অনেক হলে এটা অনেক সময়ে দুরূহ হয়ে পড়ে। সেক্ষেত্রে মেট্রিক্স পদ্ধতি সহজতর।

আমরা জানি যে বস্তুনিচয়ের গতিশক্তি দ্বিঘাত শ্রেণী হিসেবে লেখা যায়,

$$T = \tfrac{1}{2} a_{jk} \hat{q}_j \dot{q}_k + b_j \dot{q}_j + c$$

সুতরাং লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক লেখা যায়,

$$L = \tfrac{1}{2} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + b_j q_j + c - V(q_i) \qquad (৮.৩৮)$$

এখন মেট্রিক্স পদ্ধতিতে স্তম্ভ সদিক রাশি প্রবর্তন করা যায়,

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (৮.৩৯)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & \cdot\cdot \quad a_{nn} \end{pmatrix}$$

যেখানে n বস্তুনিচয়ের স্বাধীনতার-মাত্রা। সুতরাং মেট্রিক্স গুণনের নিয়ম অনুসারে আমরা লিখতে পারি,

$$L = \tfrac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} + \dot{q}^T b + c - V(q) \qquad (৮.৪০)$$

যেখানে T উপর লিখন দিয়ে স্তম্ভ থেকে সারিতে পক্ষান্তরকরণ (transpose) বোঝানো হয়েছে, অর্থাৎ

$$q^T = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

এখন q_i পরিবর্তী রাশির অনুষঙ্গী ভরবেগ হল

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = a_{jk}\,\dot{q}_k + b_j$$

যাকে আমরা একটি স্তম্ভ সদিক রাশি হিসেবে লিখতে পারি,

$$p = A\,\dot{q} + b \qquad (৮.৪১)$$

সমাধান করে,

$$\dot{q} = A^{-1}(p - b) \qquad (৮.৪২)$$

যেখানে A^{-1} হল A মেট্রিক্সের বিপরীত মেট্রিক্স $(AA^{-1} = 1)$। বিপরীত মেট্রিক্স নিচের সমীকরণ দিয়ে পাওয়া যায়,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,A_c^T \qquad (৮.৪৩)$$

এখানে $\det A$ হল A মেট্রিক্সের নির্ণায়ক এবং A_c মেট্রিক্স হল সহ-উৎপাদক (co-factor) যার অংশগুলি হল

$$(A_c)_{ij} = (-)^{i+j} M_{ij}$$

যেখানে M_{ij} হল A মেট্রিক্সের a_{ij} অংশের মাইনর বা লঘু অংশ অর্থাৎ A মেট্রিক্সের i সারি এবং j স্তম্ভ বাদ দিলে যে মেট্রিক্স হয় তার নির্ণায়ক।

এখন (৮.৪২) সমীকরণ ব্যবহার করে হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষককে লেখা যায়,

$$\begin{aligned} H &= \dot{q}^T p - L \\ &= \dot{q}^T(A\dot{q} + b) - \tfrac{1}{2}\dot{q}^T A\dot{q} - \dot{q}^T b - c + V(q) \\ &= \tfrac{1}{2}\dot{q}^T A\dot{q} + V(q) - c \\ &= \tfrac{1}{2}(p-b)^T (A^{-1})^T A A^{-1}(p-b) + V(q) - c \end{aligned}$$

যেহেতু A মেট্রিক্স প্রতিসম $(A^T = A)$, তার বিপরীত মেট্রিক্সও প্রতিসম $[(A^{-1})^T = A^{-1}]$ এবং তাই

$$H = \tfrac{1}{2}(p-b)^T A^{-1}(p-b) + V(q) - c \qquad (৮.৪৪)$$

একটি সহজ উদাহরণের জন্য বর্তুল মেরু-স্থানাঙ্ক নেয়া যায় যেখানে লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হল

$$L = \tfrac{1}{2}m\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) - V(r\theta\varphi)$$

সুতরাং

$$A = m\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad b = c = 0$$

এবং উপরিউক্ত নিয়ম অনুসারে,

$$A^{-1} = \frac{1}{mr^4\sin^2\theta}\begin{pmatrix} r^4\sin^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

অতএব

$$H = \tfrac{1}{2}m\,(p_r, p_\theta, p_\varphi)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_r \\ p_\theta \\ p_\varphi \end{pmatrix} + V(r\theta\varphi)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right) + V(r\theta\varphi)$$

যা আমরা আগেই পেয়েছি।

৮.৬ গতিসমীকরণের সিম্‌প্লেকটিক রূপ

কোন বস্তুনিচয়ের অবস্থা তার সাধারণীকৃত স্থানাঙ্ক এবং ভরবেগ দিয়ে বোঝানো হয়। তত্ত্বে এই পরিবর্তী রাশিগুলি সমপর্যায়ভুক্ত এবং তাদের মধ্যে প্রতিসাম্য বজায় থাকে। এই প্রতিসাম্য পরিষ্কার করার জন্য উপযোগী সঙ্কেত-চিহ্ন প্রবর্তন করা দরকার।

ধরা যাক আইনানুগ স্থানাঙ্ক q_i এবং ভরবেগ p_i নির্দেশ করার জন্য আমরা নিম্নলিখিত রীতির প্রবর্তন করি,

$$\left.\begin{aligned} z_1 = q_1,\ z_2 = q_2,\ \ldots\ \ldots\ \ldots,\ z_n = q_n \\ z_{n+1} = p_1,\ z_{n+2} = p_2,\ \ldots\ \ldots\ \ldots,\ z_{2n} = p_n \end{aligned}\right\} \quad (৮.৪৫)$$

সুতরাং একত্রে সবগুলিকে একটি 2×1 মাত্রার স্তম্ভ সদিক রাশির মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়,

$$z = \begin{pmatrix} z_i \\ z_{n+i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_i \\ p_i \end{pmatrix} \qquad (৮.৪৬)$$

এখন হ্যামিল্টনীয় গতিসমীকরণগুলিকে একত্রে লেখা যায়,

$$\dot{z} = J \frac{\partial H}{\partial z} \qquad (৮.৪৭)$$

যেখানে J একটি বি-প্রতিসম মেট্রিক্স,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(৮.৪৭) সমীকরণের প্রমাণ সহজ কেননা এর তাৎপর্য হল,

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_i \\ \dot{z}_{n+i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial H/\partial z_i \\ \partial H/\partial z_{n+i} \end{pmatrix}$$

অর্থাৎ

$$\dot{z}_i = \frac{\partial H}{\partial z_{n+i}}$$

$$\dot{z}_{n+i} = -\frac{\partial H}{\partial z_i}$$

সুতরাং (৮.৪৬) সমীকরণ অনুসারে,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

(৮.৪৭) সমীকরণকে হ্যামিল্টনীয় গতিসমীকরণের সিমপ্লেকটিক রূপ বলে। লক্ষ্য করা দরকার যে J মেট্রিক্স উল্লম্ব,

$$J^T J = 1$$

এবং তার বর্গ হল -1,

$$J^2 = -1$$

সুতরাং

$$J^T = J^{-1} = -J \qquad (৮.৪৮)$$

অর্থাৎ J মেট্রিক্স বিপরীত প্রতিসাম্যের। যেহেতু $J^TJ = 1$, তাই $\det J = \pm 1$ কিন্তু নির্ণায়ক নিয়ে সহজেই দেখা যায় যে

$$\det J = +1$$

৮.৭ দশা-স্থান এবং লিউভিলের উপপাদ্য

সাধারণীকৃত স্থানাঙ্ক q_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) দিয়ে একটি n-মাত্রার বিন্যাস স্থান (configuration space) সংজ্ঞায়িত করা যায় যেখানে প্রতিটি বিন্দু বস্তু-নিচয়ের একটি অবস্থা নির্দেশ করে। একইভাবে সাধারণীকৃত ভরবেগ p_i একটি n মাত্রার ভরবেগ স্থান সংজ্ঞায়িত করে যেখানে প্রতিটি বিন্দু বস্তুনিচয়ের একটি গতিশীল অবস্থা নির্দেশ করে।

'বিন্যাস-স্থান' বা q-স্থানের প্রতিটি বিন্দু বস্তুনিচয়ের কণাগুলির অবস্থান নির্দেশ করে এবং ভরবেগ-স্থান বা p-স্থানের প্রতিটি বিন্দু বস্তুকণাগুলির গতির অবস্থা বোঝায়। সুতরাং q_i এবং p_i দিয়ে সংজ্ঞায়িত 2n মাত্রার স্থান সব বস্তুকণার অবস্থান এবং ভরবেগ নির্দেশ করে। এটাকেই বলে 'দশা-স্থান'।

যদি কোন সময়ে বস্তুনিচয়ের সব বস্তুকণার প্রাথমিক অবস্থান এবং ভরবেগ জানা থাকে তাহলে তার পরবর্তী গতি সম্পূর্ণরূপে নির্ধারিত হয়। কিন্তু স্পষ্টতই সব বস্তুকণার প্রাথমিক অবস্থা স্থির করা অসম্ভব কেননা গ্যাসের ক্ষেত্রে প্রতি ঘন আয়তনে $১০^{২৩}$ এই বিশাল সংখ্যার অণু নিয়ত গতিশীল।

কিন্তু তবু আমরা কল্পনা করতে পারি যে দশা-স্থান অসংখ্য বিন্দুর সমাহার দ্বারা পূর্ণ। বিন্দুর প্রতিটি ঐ বস্তুনিচয়ের একটা সম্ভাব্য গতিময় অবস্থা নির্দেশ করে। একই ধরনের বস্তুনিচয়ের অনেকগুলির সমাহার বা অ্যাঁসাম্‌ব্‌ল আমরা নিতে পারি। ঐ সমাহারের প্রতিটি বস্তুনিচয়ের গতি এখন দশা-স্থানের প্রতিটি বিন্দু দিয়ে দেখানো হয় এবং ঐ বিন্দুর গতি দ্বারা বস্তুনিচয়ের এক একটি স্বতন্ত্র গতি নির্দেশিত হয়।

ধরা যাক দশা-স্থানে প্রতিনিধিত্বশীল বিন্দুগুলির ঘনত্ব ρ। সুতরাং দশা-স্থানের dv ঘন আয়তনে যে প্রতিনিধিত্বশীল বিন্দুগুলি থাকে তাদের সংখ্যা যদি N

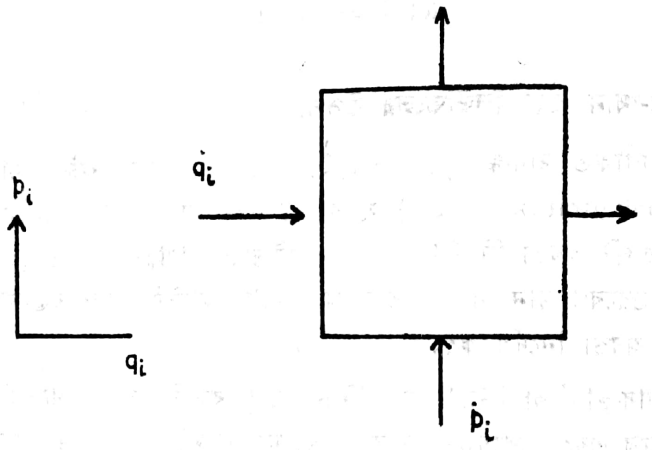
হয় তবে

$$N = \rho \, dv$$

যেখানে

$$dv = dq_1 \ldots dq_n \, dp_1 \ldots dp_n$$

এখন দশা-স্থানের $q_i - p_i$ তলে একটি ক্ষুদ্র অংশ নেয়া যাক। প্রতি সেকেণ্ডে $dp_i \, dq_i$ ক্ষেত্রে যতগুলি বিন্দু প্রবেশ করে তাদের সংখ্যা হল



চিত্র : ৮.২

$$\rho \left(\dot{q}_i \, dp_i + \dot{p}_i \, dq_i \right)$$

এবং যতগুলি নিষ্ক্রান্ত হয় তাদের সংখ্যা হল

$$\left[\rho \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\rho \, \dot{q}_i \right) dq_i \right] dp_i + \left[\rho \dot{p}_i + \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\rho \, \dot{p}_i \right) dp_i \right] dq_i$$

সুতরাং প্রতি সেকেণ্ডে ঘনত্বের মোট বৃদ্ধি হল

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dp_i \, dq_i = - \left[\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\rho \dot{q}_i \right) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\rho \dot{p}_i \right) \right] dp_i \, dq_i$$

অতএব সকল i মানের উপর যোগ করে

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \left[\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \rho \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i + \rho \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right] = 0$$

কিন্তু হ্যামিল্টনের গতিসমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = 0 \qquad (৮.৪৯)$$

কেননা (৮.১৩) সমীকরণ ব্যবহার করে,

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i}$$

সুতরাং

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \left[\frac{\partial \rho}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial \dot{p}_i}\dot{p}_i\right] = 0$$

অন্তরকলনের নিয়ম অনুসারে এই সমীকরণের তাৎপর্য এই যে ঘনত্বের প্রকৃত অন্তরকলন $d\rho/dt$ শূন্য,

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \qquad (৮.৫০)$$

কেননা

$$d\rho(q_i, p_i, t) = \frac{\partial \rho}{\partial t}dt + \frac{\partial \rho}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i}dp_i$$

(৮.৫০) সমীকরণকে লিউভিলের উপপাদ্য বলে। এই সমীকরণের তাৎপর্য হল এই যে দশা-স্থানে বিন্দুর ঘনত্ব সময়ের উপর নির্ভরশীল নয়।

৮.৮ সাধারণীকৃত অভিঘাত

ধরা যাক কোন বস্তুর উপর সক্রিয় বল $\underline{F}$। তাহলে নিচের সমীকরণ

$$\int_0^\tau \underline{F}\,dt$$

গণনা করা যায়। এখন যদি $\underline{F}$ খুব বড় এবং তার কার্যকাল τ খুব অল্প হয় এমন-ভাবে যাতে

$$\lim_{\substack{\underline{F}\to\infty \\ \tau\to 0}} \int_0^{\tau} \underline{F}\,dt = \underline{J} = \text{সসীম রাশি}$$

হয় তাহলে $\underline{J}$ সদিক রাশিকে অভিঘাত (impulse) বলে। কোন বস্তুনিচয়ের উপর সাধারণীকৃত বল ধরা যাক Q_i। তাহলে

$$\lim_{\substack{Q_i\to\infty \\ \tau\to 0}} \int^{\tau} Q_i\,dt = J_i = \text{সসীম রাশি}$$

হলে এই J_i কে সাধারণীকৃত অভিঘাত বলে। সাধারণীকৃত বলের কৃত কাজ হল,

$$\delta W = \sum_i Q_i\,\delta q_i$$

সুতরাং

$$\int_0^{\tau} \delta W\,dt = \sum_i \delta q_i \int_0^{\tau} Q_i\,dt$$

অতএব অভিঘাতজনিত অপ্রকৃত কাজ হল

$$\delta W = \lim_{\substack{Q_i\to\infty \\ \tau\to 0}} \int_0^{\tau} \delta W\,dt = \sum_i J_i\,\delta q_i$$

যেহেতু সাধারণীকৃত ভরবেগ হল,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

কেননা বিভবশক্তি $V=V(q_i)$ শুধু q_i পরিবর্তী রাশির অপেক্ষক, তাই লাগ্রাঞ্জের সমীকরণ থেকে

$$\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

সমাকলন করে,

$$[p_i]_\tau - [p_i]_0 = \int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial q_i}\, dt + \int_0^\tau Q_i\, dt \qquad (৮.৫১)$$

সুতরাং যদি আমরা লিখি

$$\Delta p_i = \lim_{\tau \to 0} \left[(p_i)_\tau - (p_i)_0 \right]$$

এবং যেহেতু q_i পরিবর্তী রাশির হঠাৎ কোন পরিবর্তন হয় না, তাই

$$\lim_{\tau \to 0} \int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial q_i}\, dt = 0$$

তাহলে (৮.৫১) সমীকরণ থেকে লেখা যায়,

$$\Delta p_i = J_i$$

অর্থাৎ সাধারণীকৃত ভরবেগের পরিবর্তনই সাধারণীকৃত অভিঘাত।

উদাহরণ

কোন বস্তুনিচয়ের লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হল

$$L = a\dot{x}^2 + b\frac{\dot{y}}{x} + c\dot{x}\dot{y} + fy^2\dot{x}\dot{z} + g\dot{y}^2 - k\sqrt{x^2 + y^2}$$

যেখানে a, b, c, f, y এবং k ধ্রুবক। হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক নির্ধারণ কর।

সমাধান : স্পষ্টতই

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2a\dot{x} + c\dot{y} + fy^2\dot{z}$$

$$p_y = \frac{b}{x} + c\dot{x} + 2g\dot{y}$$

$$p_z = fy^2\dot{x}$$

মেট্রিক্স পদ্ধতিতে লেখা হয়,

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} 0 \\ b/x \\ 0 \end{pmatrix}$$

সুতরাং

$$L = \tfrac{1}{2}\dot{q}^T A \dot{q} + \dot{q}^T a' - V$$

যেখানে

$$A = \begin{pmatrix} 2a & c & f y^2 \\ c & 2g & 0 \\ f y^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -2 f^2 g y^4$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/f y^2 \\ 0 & 1/2g & -c/2gfy^2 \\ 1/fy^2 & -c/2gfy^2 & -(4a'g-c^2)/2gf^2y^4 \end{pmatrix}$$

এবং

$$p = A\dot{q} + a'$$

সুতরাং হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক হল,

$$\begin{aligned} H &= \dot{q}^T p - L = \dot{q}^T (A\dot{q} + a') - \tfrac{1}{2}\dot{q}^T A\dot{q} - \dot{q}^T a' + V \\ &= \tfrac{1}{2}\dot{q}^T A \dot{q} + V \\ &= \tfrac{1}{2}(p - a')^T A^{-1} (p - a') + V \end{aligned}$$

এটিই প্রশ্নের উত্তর কিন্তু উপাংশে প্রকাশ করে আমরা পাই,

$$H = \tfrac{1}{2}\left(p_x, p_y - \frac{b}{x}, p_z\right) A^{-1} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y - \dfrac{b}{x} \\ p_z \end{pmatrix} + V$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{2p_x p_z}{f y^2} + \frac{\left(p_y - \dfrac{b}{x}\right)^2}{2g} - \frac{2cp_z\left(p_y - \dfrac{b}{x}\right)}{2gfy^2} - \frac{4ag - c^2}{fgf^2y^4} p_z^2\right] + k\sqrt{x^2+y^2}$$

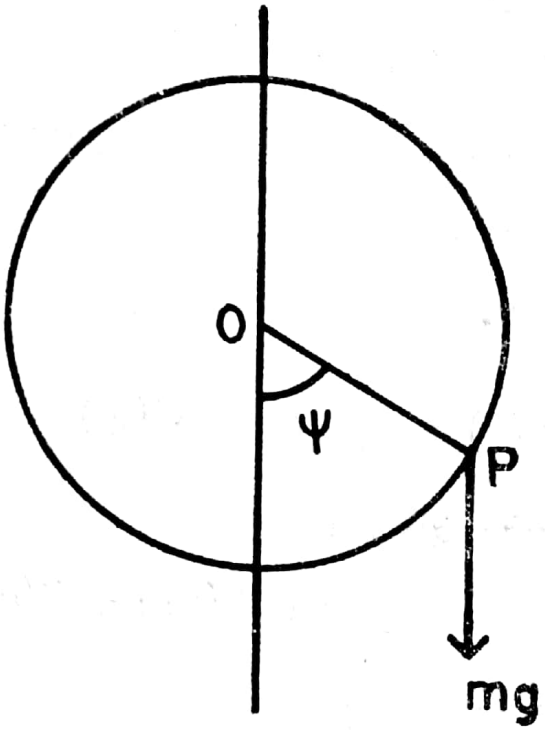
প্রশ্নমালা

১। নিম্নলিখিত বিভবশক্তির অধীনে বস্তুকণার গতিসমীকরণ নির্ধারণ কর,

(ক) $V(q) = -\frac{1}{2}aq^2 \quad a > 0$

(খ) $V(q) = \frac{1}{2}\omega^2 q^2 - \frac{1}{3}Aq^3 \quad A > 0$

২। একটি স্থির বিন্দু O থেকে ঝুলানো একটি হাল্কা l দৈর্ঘ্যের দণ্ড O বিন্দু দিয়ে যাওয়া একটি উল্লম্ব তলে ঘোরে এবং তার P বিন্দু থেকে একটি m ভরের বস্তুর উপর F বল সক্রিয়।



চিত্র : ৮.৩

বস্তুকণার গতিসমীকরণ নির্ধারণ কর।

৩। একটি m ভরের বস্তুকণার উপর নিম্নলিখিত বিভবশক্তি সক্রিয়,

$$V(q) = Aq^3 + Bq^2 + Cq + D \quad (A > 0)$$

দেখাও যে একটি উপযুক্ত রৈখিক রূপান্তরের মাধ্যমে বিভবশক্তিকে নিম্নলিখিত রূপে

$$V(Q) = AQ^3 + FQ$$

প্রকাশ করা হলে গতিসমীকরণ একই থাকে।

৪। একটি বস্তুনিচয়ের হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক হল

$$H(\psi, p) = \tfrac{1}{2}p^2 + p\sin\psi \qquad (|\psi| \leqslant \pi)$$

যেখানে ψ তার অবস্থান-কোণ। দেখাও যে তার কম্পন পর্যায়কাল হল

$$T = 4\int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{\cos^2\alpha - 2|E|}}$$

যেখানে $\cos^2\alpha = 2|E|$ এবং E হল সামগ্রিক শক্তি।

৫। দেখাও যে গতিসমীকরণ

$$\ddot{q} + G(q)\dot{q}^2 - F(q) = 0$$

হ্যামিল্টনীয় রূপে প্রকাশ করা যায় যদি অনুষঙ্গী ভরবেগ লেখা যায়,

$$p = f(q)\dot{q}$$

যেখানে

$$f(q) = \exp 2\int^{q} dq' G(q')$$

প্রমাণ কর যে হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক হল

$$H(q, p) = p^2 / [2f(q)] + V(q)$$

যেখানে

$$V(q) = -\int^{q} dq' F(q') f(q')$$

৬। একটি গতিময় বস্তুনিচয়ের লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হল

$$L = \dot{q}_1^2 + \frac{1}{a + bq_1^2}\dot{q}_2^2 + k_1 q_1^2 + k_2 \dot{q}_1 q_2$$

যেখানে a, b, k_1, k_2 ধ্রুব রাশি। হ্যামিল্টনীয় পদ্ধতিতে গতিসমীকরণ নির্ধারণ কর।

৭। একটি সুষম দণ্ড OA যার দৈর্ঘ্য 2a এবং ভর একপ্রান্ত O বিন্দুতে আটকানো নিম্নগামী লম্ব OZ এর সঙ্গে θ কোণ করে। একটি স্থির উল্লম্ব তলের সঙ্গে AOZ তল φ কোণ করে।

দণ্ডের উপর λm ভরের একটি পুঁতি গতিশীল এবং O বিন্দুর সঙ্গে একটি হাল্কা স্থিতিস্থাপক তার দিয়ে সেটি সংযুক্ত। তারের স্থিতিস্থাপকতার গুণাঙ্ক হল n mg এবং তার স্বাভাবিক দৈর্ঘ্য হল a। দেখাও যে সম্পূর্ণ বস্তুনিচয়ের গতিশক্তি হল T যেখানে

$$2T = \frac{4}{3} ma^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)$$

$$+ \lambda m (\dot{x}^2 + x^2 \dot{\theta}^2 + x^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)$$

যেখানে x হল তারের প্রসারিত দৈর্ঘ্য। গতিসমীকরণ নির্ধারণ কর এবং দেখাও যে যদি $\theta = \pi / 3$ এবং $x = 4a / 3$ মানে অব্যাহত গতি সম্ভব হয় তবে

$$\dot{\varphi}^2 = 3g/2a \quad \text{এবং} \quad n = 6\lambda$$

৮। একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য l এবং ভর m। দোলকের ঝুলন-বিন্দু একটি উল্লম্ব তলে অধিবৃত্তের ($z = ax^2$) উপর ঘোরে। গতিসমীকরণ নির্ধারণ কর।

৯। ধরা যাক যে লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক $\dot{q}$ এর বহুরাশি (polynomial) অপেক্ষক যার মধ্যে দ্বিঘাতের বেশি অংশ নেই। নিচের 2n সমীকরণকে

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

মেট্রিক্স পদ্ধতিতে পরিবর্তন করে q_i এবং p_i অপেক্ষক হিসেবে $\dot{q}_i$ এবং $\dot{p}_i$ এর 2n সমীকরণে প্রকাশ কর।

দেখাও যে হ্যামিল্টনীয় গতিসমীকরণ থেকেও একই সমীকরণ পাওয়া যায়।

১০। দেখাও যে হ্যামিল্টনীয় নীতি এভাবেও লেখা যায়

$$\delta \int_1^2 [2H (z, t) + \dot{z} J \dot{z}] \, dt = 0$$

নবম অধ্যায়

আইনানুগ রূপান্তর তত্ত্ব

পদার্থবিজ্ঞানের যে কোন সমস্যা সমাধানের জন্যে স্থানাঙ্ক নির্বাচন হল প্রাথমিক পদক্ষেপ এবং উপযুক্ত নির্বাচনের ফলে সমাধান অনেক ক্ষেত্রে সহজতর হয়। চিরায়ত বলবিদ্যায় একই ব্যাপার ঘটে; অনেক সময়েই আমরা একটা অনুপযুক্ত সাধারণীকৃত স্থানাঙ্কগুচ্ছ (q, p) থেকে উপযুক্ত স্থানাঙ্ক (Q, P) গুচ্ছে রূপান্তর করতে চাই। অবশ্য রূপান্তর এমনভাবে করতে হবে যাতে হ্যামিল্টনীয় গতি-সমীকরণ বজায় থাকে।

সুতরাং রূপান্তর তত্ত্বের মূল লক্ষ্য দুটি :

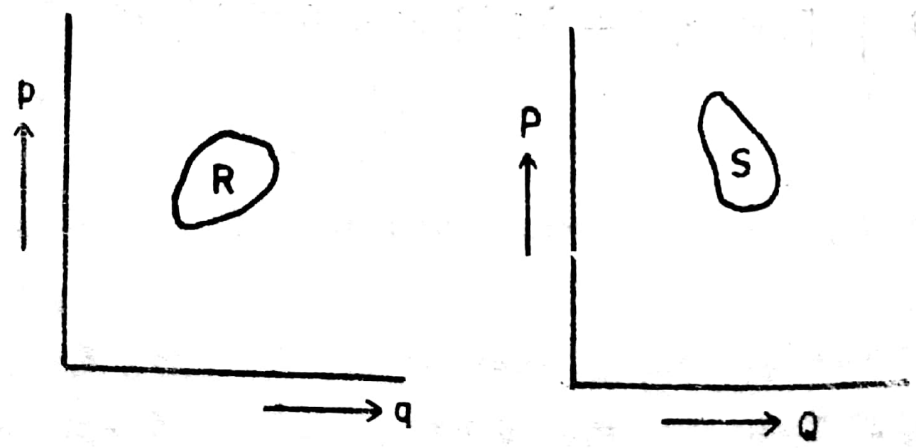
(১) হ্যামিল্টনীয় গতিসমীকরণ বজায় রাখে এমন রূপান্তর নির্ধারণ করা এবং

(২) সেইসব বিশেষ রূপান্তর আবিষ্কার করা যা হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষককে সহজ রূপে প্রকাশ করে।

প্রথম লক্ষ্যটি এই অধ্যায়ে ব্যাখ্যা করা হবে এবং দ্বিতীয়টি দশম অধ্যায়ে বিবৃত হবে।

৯.১ সময়-নিরপেক্ষ রূপান্তর

দশাস্থানে বিভিন্ন স্থানাঙ্ক প্রণালী বা প্রতিকৃতির মধ্যে আমরা রূপান্তর সাধন করতে চাই। ৯.১ চিত্রে এ ধরনের দুটি প্রতিকৃতি দেখানো হয়েছে। যদি (q, p) প্রতিকৃতির R অঞ্চলকে (Q, P) প্রতিকৃতির S অঞ্চলে রূপান্তর



চিত্র : ৯.১

করা যায়, তাহলে ধরা যাক প্রতিটি প্রতিকৃতিতে (q, p) এবং (Q, P) রাশিকে কার্টেশীয় অক্ষাংশ হিসেবে নিয়ে ক্ষেত্রফল সংজ্ঞায়িত করা হল।

সুতরাং (p, q) প্রতিকৃতিতে R অঞ্চলের ক্ষেত্রফল

$$A_R = \iint_R dq\, dp$$

এবং (P, Q) প্রতিকৃতিতে S অঞ্চলের ক্ষেত্রফল

$$A_S = \iint_S dQ\, dP$$

সাধারণ রূপান্তরের ক্ষেত্রে, A_R এবং A_S এই দুটির সংখ্যাগত মান ভিন্ন হতে পারে, কেননা

$$\iint_S dQ\, dP = \iint_R J dq\, dp \qquad (৯.১)$$

যেখানে J হল স্থানাঙ্ক রূপান্তরের জেকোবীয় নির্ণায়ক,

$$J = \frac{\partial (Q, P)}{\partial (q, p)}$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} \qquad (৯.২)$$

এখন রূপান্তর আইনানুগ হবে তখনই যখন ক্ষেত্রফলের মান বজায় থাকে অর্থাৎ তার সংখ্যাগত মান প্রতিকৃতি নিরপেক্ষ হয়। সুতরাং আইনানুগ রূপান্তরের শর্ত হল এই যে জেকোবীয় নির্ণায়ক ধ্রুবক হবে। এই ধ্রুবকের মান ১ নিয়ে আমরা লিখতে পারি,

$$J = 1$$

সুতরাং আইনানুগ রূপান্তরের সংজ্ঞা হল এই যে তার জন্য জেকোবী নির্ণায়ক 1।

উদাহরণস্বরূপ, নিচের রূপান্তর

$$Q = p \qquad p = -q$$

আইনানুগ কেননা এক্ষেত্রে $J = 1$, কিন্তু

$$p = P\cos Q \qquad q = P\sin Q$$

আইনানুগ নয়। আর একটি উদাহরণ হল,

$$Q = a + \alpha p \qquad P = p + \beta q$$

যার জেকোবীয়ান আমরা পাই

$$J = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha\beta$$

এবং এই রূপান্তর আইনানুগ হবে যখন α অথবা β অথবা উভয় শূন্য।

৯.২ দশাস্থানে স্টোক্‌স-এর উপপাদ্য

আমরা দশাস্থানে একগুচ্ছ বিন্দু S নিতে পারি যা ঐ স্থানে একটা দ্বিমাত্রিক জগত (ম্যানিফোল্ড) সৃষ্টি করে। অর্থাৎ উক্ত S জগতের বিন্দুগুলির অক্ষাংশ (q_i, p_i) দুটি বাস্তব পরিবর্তী রাশি u_1 এবং u_2-র অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক। এখানে i সূচকের মান 1 থেকে n পর্যন্ত এবং n বস্তুনিচয়ের স্বাধীনতার-মাত্রা। সুতরাং এই দ্বিমাত্রিক জগতের জন্য লেখা যায়,

$$q_i = q_i(u_1, u_2) \qquad p_i = p_i(u_1, u_2)$$

অর্থাৎ সাধারণীকৃত পরিবর্তী রাশিগুলি প্রত্যেকে ঐ দ্বিমাত্রিক জগতের অক্ষাংশের উপর নির্ভরশীল।

এখন আমরা একটি ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফল dS কে লিখতে পারি,

$$dS = \sum_{i=1}^{n} dq_i\, dp_i$$

এবং সামগ্রিক ক্ষেত্রফল হল,

$$\int dS = \int \sum_i dq\, dp,$$

জেকোবী নির্ণায়কের মাধ্যমে u_1, u_2 পরিবর্তী রাশিতে রূপান্তর করে, আমরা পাই

$$\int dS = \sum_i \int J \, du_1 \, du_2 = \int [u_1, u_2]_{L.B} \, du_1 \, du_2$$

যেখানে

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u_1} & \frac{\partial q_i}{\partial u_2} \\ \frac{\partial p_i}{\partial u_1} & \frac{\partial p_i}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

এবং

$$[u_1, u_2]_{L.B} = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u_1} \frac{\partial p_i}{\partial u_2} - \frac{\partial q_i}{\partial u_2} \frac{\partial p_i}{\partial u_1} \right) \qquad (৯.৩)$$

এই $[u_1, u_2]_{L.B}$ কে লাগ্রাঞ্জ বন্ধনী বলা হয়।

এখন যেহেতু

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left(p_i \frac{\partial q_i}{\partial u_2} \right) - \frac{\partial}{\partial u_2} \left(p_i \frac{\partial q_i}{\partial u_1} \right) = - [u_1, u_2]_{L.B.}$$

তাই আমরা লিখতে পারি,

$$\int dS = - \sum_{i=1}^{n} \int du_1 \, du_2 \left(\frac{\partial F_2{}^i}{\partial u_1} - \frac{\partial F_1{}^i}{\partial u_2} \right)$$

যেখানে

$$p_i \frac{\partial q_i}{\partial u_k} = F_k^i \qquad k = 1, 2$$

লেখা হয়েছে। সুতরাং সদিক রাশি হিসেবে লেখা যায়

$$\int dS = \sum_i \int_A d\sigma \left(\underline{\nabla} \times \underline{F}^i \right) \cdot \hat{\underline{n}}$$

যেখানে $\hat{\underline{n}}$ হল ক্ষেত্রফল $d\sigma = du_1\, du_2$ এর উপরে লম্ব। লক্ষ্য করা দরকার যে $u_1 - u_2$ তলে লম্বের দিক ধনাত্মক নেয়া হবে যখন A ক্ষেত্রফলের পরিসীমা C এর চারদিকে ঘুরে আসার সময়ে ক্ষেত্রফল সব সময়ে বাঁ-দিকে থাকে (অর্থাৎ ডান-হাতি স্ক্রু নিয়ম অনুসারে লম্বের দিক নেয়া হয়)।

সুতরাং সদিক রাশির স্টোক্স-উপপাদ্য অনুসারে,

$$\int dS = \sum_i \oint_C \underline{F}^i \cdot d\underline{u}$$

$$= \sum_i \oint_C (F_1^i\, du_1 + F_2^i\, du_2)$$

$$= \sum_i \oint_C p_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial q_i}{\partial u_2} du_2 \right)$$

অতএব

$$\sum_i \int dp_i\, dq_i = \sum_i \oint_C p_i\, dq_i \qquad (৯.৪)$$

এটাই দশাস্থানে স্টোক্স-এর উপপাদ্য।

৯.৩ সৃজন অপেক্ষক

দশাস্থানে (q, p) প্রতিকৃতিতে কোন অঞ্চলের ক্ষেত্রফল স্টোক্স-উপপাদ্য ব্যবহার করে লেখা যায়,

$$A_R = \iint_R dq\, dp = \oint_C p\, dq$$

যেখানে সব স্বাধীনতার-মাত্রার উপরে সমষ্টিকরণ প্রতীক Σ উহ্য রাখা হয়েছে। এখানে R ক্ষেত্রফলের পরিসীমাকে C বলা হয়েছে।

একইভাবে (Q, P) প্রতিকৃতি লেখা যায়,

$$A_S = \iint_S dQ\, dP = \oint_C P\, dQ$$

এখন যেহেতু এই রূপান্তরের জেকোবী নির্ণায়ক + ১, অর্থাৎ রূপান্তরটি আইনানুগ, তাই লেখা যায়,

$$\oint_C p\,(q)\,dq = \oint_C P\,(Q)\,dQ \qquad (৯.৫)$$

যেখানে C হল দশাস্থানে যে কোন একটি আবদ্ধ বক্ররেখা। আমরা যে কোন যুগ্ম পরিবর্তী রাশি পরস্পর নিরপেক্ষ হিসেবে নিতে পারি যেমন উদাহরণস্বরূপ (q, Q) দুটি স্বতন্ত্র পরিবর্তী রাশি নেয়া যায় এবং P আর p রাশিকে তাদের অপেক্ষক হিসেবে প্রকাশ করা যায়। সুতরাং সেক্ষেত্রে (৯.৫) সমীকরণকে লেখা যায়,

$$\oint_C [\,p\,(q, Q)\,dq - P\,(q, Q)\,dQ\,] = 0 \qquad (৯.৬)$$

যেহেতু এই সমীকরণ যে কোন বক্ররেখা C এর জন্যে সঠিক তাই সমাকলনের রাশি একটি নতুন অপেক্ষক $F_1\,(q, Q)$ এর প্রকৃত অন্তরকলন হবে, অর্থাৎ

$$\oint_C [\,p\,dq - P\,dQ\,] = \oint_C dF_1\,(q, Q)$$

কেননা সম্পূর্ণ আবদ্ধ বক্ররেখায় সমাকলন করে ডান দিকে আমরা শূন্য পাই। সুতরাং

$$\oint_C p\,dq - \int_C P\,dQ = \oint_C \frac{\partial F_1}{\partial q}\,dq + \oint \frac{\partial F_1}{\partial Q}\,dQ \qquad (৯.৭)$$

এখন যেহেতু C বক্ররেখা একটি অনির্ধারিত রেখা তাই dq এবং dQ রাশির সহগগুলি সমান হতে হবে। অতএব

$$p = \frac{\partial F_1\,(q, Q)}{\partial q} \qquad P = -\frac{\partial F_1\,(q, Q)}{\partial Q} \qquad (৯.৮)$$

অর্থাৎ আইনানুগ রূপান্তরের ক্ষেত্রফল বজায় রাখার তাৎপর্য এই যে একটি অপেক্ষক $F_1\,(q, Q)$-এর অস্তিত্ব থাকবে। একেই সৃজন অপেক্ষক বলে। দশা-স্থানে $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ রূপান্তর প্রকাশ করার এটাই সুসংহত উপায়।

সৃজন অপেক্ষকের উদ্ভব আর একভাবেও দেখানো যায়। আমরা জানি যে হ্যামিল্টনীয় পদ্ধতিতে ভরবেগ হল

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

এবং সেগুলি সাধারণীকৃত অক্ষাংশ q_i এর সমপর্যায়ভুক্ত। সুতরাং আমরা (q_i, p_i) থেকে (Q_i, P_i) স্বতন্ত্র অক্ষাংশে যুগপৎ রূপান্তর বিবেচনা করি যার রূপান্তর সমীকরণ হল,

$$Q_i = Q_i(q_1, \ldots q_n, p_1 \ldots p_n, t) \qquad (৯.৯)$$
$$P_i = P_i(q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n, t)$$

এই রূপান্তরকে বিন্দু (point) রূপান্তরও বলে। হ্যামিল্টনীয় গতিসমীকরণ এই বিন্দু রূপান্তরের অধীনে সহভেদী (covariant) হবে এটাই আইনানুগ রূপান্তরের মূল শর্ত।

এখন পুরাতন পরিবর্তী রাশি q_i, p_i এর সাপেক্ষে হ্যামিল্টনীয় গতিসমীকরণ হল

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (৯.১০)$$

আমরা এখন একটি নতুন অপেক্ষক $K(Q, P)$ প্রবর্তন করতে চাই যা দিয়ে গতিসমীকরণগুলি হ্যামিল্টনীয় পদ্ধতিতে প্রকাশ করা যায়,

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \qquad (৯.১১)$$

অর্থাৎ K অপেক্ষকটি নতুন পরিবর্তী-রাশি (Q, P)-তে হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক হবে। সুতরাং

$$H = p_i \dot{q}_i - L \quad \text{এবং} \quad K = P_i \dot{Q}_i - L'$$

যেখানে L' একটি অপেক্ষক যা হ্যামিল্টনের পরিমার্জিত নীতিতে

$$\delta \int L' \delta t = 0$$

ব্যবহার করলে নতুন পরিবর্তী রাশির সাপেক্ষে সঠিক গতিসমীকরণ পাওয়া যাবে। এই শর্তের অধীনে যে রূপান্তর পাওয়া যায় তাকেই আইনানুগ রূপান্তর বা সংযোগ রূপান্তর বলে।

সুতরাং হ্যামিল্টনের পরিমার্জিত নীতি পুরাতন এবং নতুন উভয় পরিবর্তী রাশিতে প্রকাশ করা যায় এবং আমরা লিখতে পারি,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H)\, dt = 0 \qquad \delta \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}_i - K)\, dt = 0 \quad (৯.১২)$$

এই দুটি সমীকরণ একত্র করে,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [(p_i \dot{q}_i - H) - (P_i \dot{Q}_i - K)\, dt = 0$$

কিন্তু আগেই বলা হয়েছে যে এধরনের একটি শর্ত

$$\delta \int f\, dt = 0$$

সাধারণভাবে সার্থক হয় তখনই যখন f একটি প্রকৃত অন্তরকলন $f = dF/dt$, কেননা সেক্ষেত্রে সমাকলিত মান $\delta f(t_2) - \delta f(t_1)$ শূন্য যেহেতু δf অপেক্ষকের এই দুই প্রান্তিক মান শূন্য। সুতরাং

$$(p_i \dot{q}_i - H) - (P_i \dot{Q}_i - K) = \frac{dF}{dt} \qquad (৯.১৩)$$

এখানে F অপেক্ষক p_i, q_i, P_i, Q_i এবং t এই $4n+1$ পরিবর্তী রাশির উপর নির্ভরশীল কিন্তু (৯.৯) সমীকরণ থেকে 2n সংখ্যক রূপান্তর সমীকরণ পাওয়া যায়। সুতরাং F অপেক্ষক আসলে q_i, p_i, Q_i এবং P_i পরিবর্তী রাশির যে কোন 2n সংখ্যক রাশির এবং সময়ের উপর নির্ভরশীল।

আমরা বিশেষ ক্ষেত্রে নিতে পারি

$$F = F_1(q_i, Q_i, t)$$

সুতরাং

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

অতএব

$$\left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\right) dq_i - \left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\right) dQ_i + \left(K - H - \frac{\partial F_1}{\partial t}\right) dt = 0 \qquad (৯.১৪)$$

যেহেতু q_i, Q_i এবং t স্বতন্ত্র পরিবর্তী রাশি,

$$p_i = \frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial q_i} \qquad P_i = -\frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial Q_i}$$

এবং

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \qquad (৯.১৫)$$

(৯.১৫) সমীকরণের প্রথম দুটি আগেই পাওয়া গিয়েছিল। প্রথম সমীকরণটি সমাধান করে আমরা Q_i পরিবর্তী রাশিকে q_i, p_i এবং t এর অপেক্ষক হিসেবে নির্ধারণ করতে পারি এবং তারপর দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে P_i কে ঐ পরিবর্তী রাশির অপেক্ষক হিসেবে পাওয়া যায়। এ কারণেই F অপেক্ষককে রূপান্তরের সৃজনকারী অপেক্ষক বলে।

৯.৪ অন্যান্য পরিবর্তী রাশিতে সৃজনকারী অপেক্ষক

আমরা সৃজনকারী অপেক্ষক F_1 কে (q, Q) পরিবর্তী রাশির উপর নির্ভরশীল করে স্টোক্‌স উপপাদ্য থেকে পাই

$$p = \frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial q} \qquad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}$$

কিন্তু সৃজনকারী অপেক্ষককে (q, P), (Q, p) অথবা (P, p) এইসব যুগ্ম পরিবর্তী রাশির যে কোন জোড়ার উপর নির্ভরশীল নেয়া যায়।

এখন দশাস্থানে যে কোন আবদ্ধ বক্রক্ষেত্র C এর জন্য লেখা যায়,

$$0 = \oint_C d(PQ) = \oint_C (P\,dQ + Q\,dP)$$

অর্থাৎ

$$\oint_C P dQ = -\oint_C Q dP \qquad (৯.১৬)$$

একই সমীকরণ (q, p) রাশির জন্যও লেখা যায়। সুতরাং ক্ষেত্রফল বজায় রাখার সমীকরণের

$$\oint_C p dq = \oint_C P dQ$$

উভয় দিক দুইভাবে প্রকাশ করা যায় যার ফলে সৃজনকারী অপেক্ষক মোট চার রকমের হয় অর্থাৎ সৃজনকারী অপেক্ষক $F_1(q, Q)$, $F_2(q, P)$, $F_3(Q, p)$ এবং $F_4(P, p)$ এই চারভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়।

যদি আমরা (q, P) পরিবর্তী রাশি ব্যবহার করি তাহলে (৯.৫) এবং (৯.১৬) সমীকরণদ্বয় থেকে লেখা যায়,

$$\oint_C p dq = -\oint_C Q dP$$

অর্থাৎ

$$\oint_C (p dq + Q dP) = 0$$

যেহেতু C অনির্ধারিত বক্রক্ষেত্র, তাই

$$\oint (p\,dq + Q\,dP) = \oint_C dF_2(q, P)$$

$$= \oint \left(\frac{\partial F_2}{\partial q} dq + \frac{\partial F_2}{\partial P} dP\right)$$

সুতরাং

$$p = \frac{\partial F_2(q, P)}{\partial q} \qquad Q = \frac{\partial F_2(q, P)}{\partial P} \qquad (৯.১৭)$$

লক্ষ্য করা দরকার যে $F_1(q, Q)$ এবং $F_2(q, P)$ পরস্পরের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট কেননা

$$\oint_C dF_2 = \oint (pdq + Q\,dP) = \oint \{p\,dq - P\,dQ + d(PQ)\}$$

$$= \oint d(F_1 + PQ)$$

সুতরাং

$$F_2(q, P) = F_1(q, Q) + PQ) \qquad (৯.১৮)$$

অর্থাৎ F_2 অপেক্ষক F_1 অপেক্ষকের লেজেন্ডার রূপান্তর ছাড়া আর কিছুই নয়। সাধারণভাবে F_2 অপেক্ষককে q, P এবং t রাশির নির্ভরশীল করে আমরা (৯.১৩) সমীকরণ থেকে লিখতে পারি,

$$(p_i \dot{q}_i - H) - (P_i \dot{Q}_i - K) = \frac{dF_1}{dt} = \frac{d}{dt}(F_2 - Q_i P_i)$$

অর্থাৎ

$$\left(p_i - \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\right) dq_i + \left(Q_i - \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\right) dP_i + \left(K - H - \frac{\partial F_2}{\partial t}\right) dt = 0$$

সুতরাং

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \qquad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \qquad (৯.১৯)$$

যেহেতু

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

তাই (৯.১৫) এবং (৯.১৯) সমীকরণের তৃতীয়টি একই সমীকরণ। প্রথম সমীকরণটিও একই কেননা

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_i} = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$$

শুধু দ্বিতীয় সমীকরণটি আপাতদৃষ্টিতে ভিন্ন। আবার (৯.১৬) সমীকরণের মতো লেখা যায়,

$$\oint p dq = -\oint q dp$$

এবং তাই (৯.৫) সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$-\oint q dp = \oint P dQ$$

অর্থাৎ

$$\oint (-q dp - P dQ) = \oint dF_3 (Q, p) = \oint \left[\frac{\partial F_3}{\partial Q} dQ + \frac{\partial F_3}{\partial P} dp \right]$$

সুতরাং

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} \quad \text{এবং} \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} \qquad (৯.২০)$$

যেহেতু

$$\oint dF_3 = \oint (-q dp - P dQ)$$

$$= \oint (p dq - d(pq) - P dQ)$$

$$= \oint (dF_1 - d(pq))$$

তাই আমরা পাই

$$F_3 (p, Q) = F_1 (q, Q) - pq \qquad (৯.২১)$$

স্পষ্টতই F_3 অপেক্ষক F_1 অপেক্ষকের লেজেন্ডার রূপান্তর। সুতরাং (৯.১৩) সমীকরণ থেকে লেখা যায়,

$$(p_i \dot{q}_i - H) - (P_i \dot{Q}_i - K) = \frac{dF_1}{dt} = \frac{d}{dt} (F_3 + p_i q_i)$$

$$= \frac{\partial F_3}{\partial t} + \frac{\partial F_3}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + p_i \dot{q}_i + q_i \dot{p}_i$$

অথবা

$$-\left(P_i + \frac{\partial F_3}{\partial Q_i}\right) dQ_i - \left(q_i + \frac{\partial F_3}{\partial p_i}\right) dp_i - \left(H - K + \frac{\partial F_3}{\partial t}\right) = 0$$

সুতরাং

$$q_i = -\frac{\partial F_3\,(p,Q)}{\partial p_i} \qquad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$$

এবং

$$H = K - \frac{\partial F_3}{\partial t} \tag{৯.২২}$$

সবশেষে (৯.১৬) এবং (৯.৫) সমীকরণ একত্র করে আমরা লিখতে পারি

$$-\oint q\,dp = -\oint Q\,dP$$

অর্থাৎ

$$\oint (-q\,dp + Q\,dP) = \oint dF_4\,(p, P)$$

অতএব

$$q = -\frac{\partial F_4\,(p,P)}{\partial p} \quad \text{এবং} \quad Q = \frac{\partial F_4\,(p, P)}{\partial P} \tag{৯.২৩}$$

যেহেতু

$$\oint dF_4 = \oint (-q\,dp + Q\,dP) = \oint (p\,dq + Q\,dP - d(dq)$$

$$= \oint d\,(F_2 - pq)$$

অতএব

$$F_4\,(p, P) = F_2\,(q, P) - pq = E_1\,(q, Q) + PQ - pq$$

অর্থাৎ $F_4\,(q, p)$ অপেক্ষক $F_2\,(q, P)$ অপেক্ষকের লেজেন্ডার রূপান্তর অথবা $F_1\,(q, Q)$ অপেক্ষকের দ্বিতীয়বার লেজেণ্ডার রূপান্তর। সুতরাং (৯.১৩) সমীকরণ থেকে,

$$(p_i \dot{q}_i - H) - (P_i \dot{Q}_i - K) = \frac{dF_4}{dt} - (Q_i \dot{P}_i + \dot{Q}_i \dot{P}_i) + (q_i \dot{p}_i + p_i \dot{q}_i)$$

অতএব

$$-q_i \dot{p}_i - H + K + Q_i \dot{P}_i = \frac{\partial F_4}{\partial t} + \frac{\partial F_4}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \dot{P}_i$$

সুতরাং

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \qquad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$$

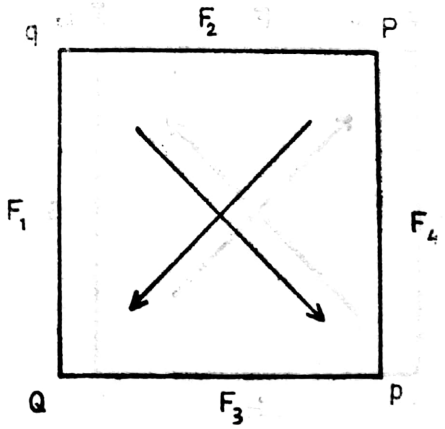
এবং

$$K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \tag{৯.২৪}$$

(৯.৭), (৯.১৭) (৯.২০) এবং (৯.২৩) সমীকরণে আমরা দেখেছি,

$$\begin{aligned} F_1(q, Q) &= pdq - PdQ \\ F_2(p, P) &= -qdp + QdP \\ F_3(p, Q) &= -qdp - PdQ \\ F_4(p, P) &= -qdp + QdP \end{aligned} \tag{৯.২৫}$$

এই সমীকরণগুলিকে ৯.২ চিত্রে দেখানো হয়েছে।



চিত্র ঃ ৯.২

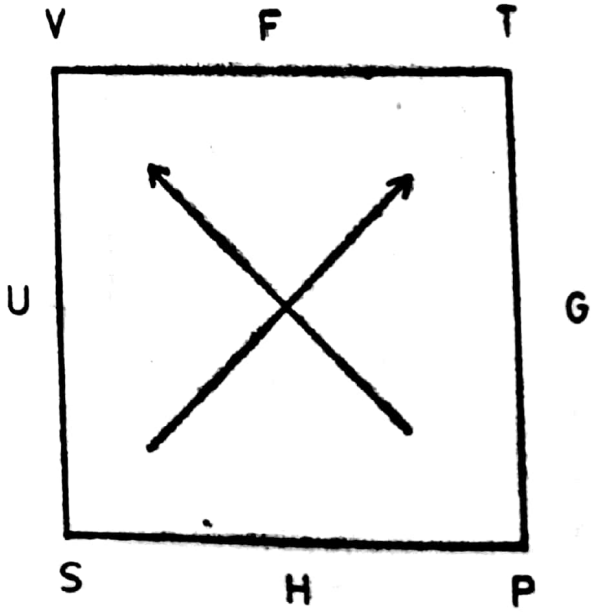
চারটি অপেক্ষক F_1, F_2, F_3 এবং F_4 একটি বর্গের চার বাহুতে বসান হয়েছে এবং প্রত্যেকটি অপেক্ষকের দুপাশে আছে সেই অপেক্ষকের পরিবর্তী রাশি দুটি যেমন $F_3 = F_3(p, Q)$। প্রতিটি অপেক্ষককে তার স্বতন্ত্র পরিবর্তী রাশির অন্তরকলনে প্রকাশ করতে হলে, সহগের তীর চিহ্ন ব্যবহার করতে হয়। তীরটি যদি একটি পরিবর্তী রাশির দিকে যায় তবে তার সংশ্লিষ্ট সহগের চিহ্ন ঋণাত্মক হবে, অন্যথায় ধনাত্মক হবে। সুতরাং F_3 অপেক্ষকে dp এবং dQ উভয়ের চিহ্ন ঋণাত্মক কেননা তীর p এবং Q রাশির দিকে। অর্থাৎ $F_3(p, Q) = -qdp - PdQ$। একইভাবে $F_4(p, P) = -qdp + QdP$। এভাবে (৯.২৫) সমীকরণগুলি সহজে লেখা যায়। ৯.১ চিত্র থেকে আরো লেখা যায়,

$$\frac{\partial p}{\partial Q} = -\frac{\partial P}{\partial q} \qquad \frac{\partial p}{\partial P} = \frac{\partial Q}{\partial q}$$
$$\frac{\partial q}{\partial Q} = \frac{\partial P}{\partial p} \qquad \frac{\partial q}{\partial P} = -\frac{\partial Q}{\partial p} \qquad (৯.২৬)$$

কেননা F_1 থেকে $p_i = \partial F_1/\partial q_i$ এবং তাই

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_j\, \partial q_i} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}$$ ইত্যাদি।

এই সমীকরণগুলি ম্যাক্সওয়েলের তাপ বলবিদ্যার সমীকরণের সঙ্গে তুলনীয় (চিত্র ৯.৩)। (৯.২৬) সমীকরণে $p \to V$, $Q \to T$, $P \to S$ এবং $q \to P$ লেখা যায়। সুতরাং আমরা পাই



চিত্র : ৯.৩

$$\frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{\partial S}{\partial P} \qquad \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial T}{\partial P}$$

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\partial S}{\partial V} \qquad \frac{\partial P}{\partial S} = -\frac{\partial T}{\partial V}$$

৯·৫ আইনানুগ রূপান্তরের উদাহরণ

ধরা যাক সৃজন অপেক্ষক হল

$$F_2 = q_i P_i$$

সুতরাং ৯.১৯ সমীকরণ থেকে

$$p_i = P_i \qquad Q_i = q_i \qquad K = H$$

অর্থাৎ $F_2 = qP$ রূপান্তরের মাধ্যমে পরিবর্তী রাশি (q, p) একই থাকে এবং তাই সেটা একক রূপান্তর। একই কারণে নিচের রূপান্তর

$$F_2 = -q_i P_i$$

থেকে দেখা যায়,

$$p_i = -P_i \qquad Q_i = -q_i \qquad K = H$$

অর্থাৎ এটি হল অবস্থান বিপরীতকরণের রূপান্তর।

আমরা যদি অত্যন্ত সাধারণভাবে লিখি

$$F_2 = f_i(q_j, t)\, P_i$$

তাহলে দেখা যায়

$$Q_i = f_i(q_j, t)$$

যাকে সাধারণ বিন্দু-রূপান্তর বলা হয়েছে। সুতরাং সব বিন্দু-রূপান্তর আইনানুগ রূপান্তর।

অবশ্য আরো সাধারণ করে লেখা যায়,

$$F_2(q, P) = f_i(q_j, t)\, P_i + g_i(q_j, t)$$

সেক্ষেত্রে

$$Q_i = f_i(q, t) \qquad p_i = \frac{\partial f_i}{\partial q_i} P_j + \frac{\partial g_i}{\partial q_i}$$

অথবা মেট্রিক্স পদ্ধতিতে,

$$Q = f \quad p = P\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial g}{\partial q}$$

যেখানে $p, P, \partial g/\partial q$ হল $n \times 1$ মাত্রার স্তম্ভ-মেট্রিক্স এবং $\partial f/\partial q$ একটি $n \times n$ মেট্রিক্স। সুতরাং

$$P = \left(p - \frac{\partial g}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)^{-1}$$

অর্থাৎ P পরিবর্তী রাশি পুরাতন অবস্থান এবং ভরবেগ অক্ষাংশ (q, p) উভয়ের উপর নির্ভরশীল।

যদি সৃজনকারী অপেক্ষক এভাবে নেয়া যায়,

$$F_1 = q_i Q_i$$

তাহলে (৯.১৫) সমীকরণ থেকে

$$p_i = Q_i \qquad P_i = -q_i \qquad H = K$$

অর্থাৎ এই রূপান্তরের মাধ্যমে অবস্থান এবং ভরবেগের নামকরণ পরিবর্তন হয়। এ থেকেও বোঝা যায় যে হ্যামিলটনীয় পদ্ধতিতে, অবস্থান এবং ভরবেগের মধ্যে পার্থক্য কেবল নামকরণের; গতিবিজ্ঞানের দৃষ্টিতে এই দুই রাশির মধ্যে মৌলিক কোন পার্থক্য নেই।

আর একটি উদাহরণ হিসেবে আমরা দেখাতে পারি যে নিচের রূপান্তর

$$Q = \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right) \qquad P = q \cot p$$

একটি আইনানুগ রূপান্তর। অন্তরকলন করে,

$$PdQ = q \cot p\left(\cot p\, dp - \frac{dq}{q}\right)$$

সুতরাং দশাস্থানে ক্ষেত্রফল বজায় রাখার শর্ত অনুসারে

$$pdq - PdQ = d(pq + q \cot p)$$

(৯.৬) সমীকরণের সমাকলনের রাশি একটি প্রকৃত অন্তরকলনের রাশি। সুতরাং

$$F_1(q, Q) = qp + q \cot p$$

$$= q \sin^{-1}(q e^{Q}) + q \cot\left[\sin^{-1}(q e^{Q})\right]$$

$$= q \sin^{-1}(q e^{Q}) + \sqrt{e^{-2Q} - q^2}$$

$F_1(q, Q)$ অপেক্ষকের অস্তিত্বই প্রমাণ করে যে রূপান্তরটি আইনানুগ।

আমরা এই উদাহরণে $F_2(q, P)$ অপেক্ষক পাই,

$$F_2(q, P) = qp + q \cot p + PQ$$

$$= q \tan^{-1}\left(\frac{q}{P}\right) + P\left[1 - \tfrac{1}{2} \ln (q^2 + P^2)\right]$$

কেননা $p = \tan^{-1}(q/P)$ এবং $Q = -\frac{1}{2} \ln (q^2 + P^2)$।

আইনানুগ রূপান্তরের উপযোগিতা এই যে, এই রূপান্তর ব্যবহার করে হ্যামিল্টনের গতিসমীকরণকে এমনভাবে প্রকাশ করা সম্ভব হয় যা সহজে সমাধান করা যায়। এটি আমরা একমাত্রিক জগতে সরল সুষম দোলকের উদাহরণ দিয়ে ব্যাখ্যা করতে পারি।

সরল স্পন্দকের হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক হল

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \tfrac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

যেখানে m স্পন্দকের ভর এবং ω তার নিজস্ব স্পন্দন-হার। আমরা এই অপেক্ষকের উপর নিচের রূপান্তর করতে পারি,

$$F_1(q, Q) = kq^2 \cot Q$$

সুতরাং

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = 2kq^2 \cot Q$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = kq^2 \operatorname{cosec}^2 Q$$

অর্থাৎ

$$q = \sqrt{\frac{P}{k}} \sin Q \qquad p = 2\sqrt{kP} \cos Q$$

সুতরাং

$$K = H = P\left(\frac{2k}{m}\cos^2 Q + \frac{m\omega^2}{2k}\sin^2 Q\right)$$

এবং $k = \frac{1}{2}m\omega$ নিলে এই নতুন হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষকে আর Q থাকে না,

$$K(Q, P) = \omega P$$

সুতরাং হ্যামিল্টনীয় গতিসমীকরণ হল

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega \qquad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0$$

অর্থাৎ

$$Q = \omega t + \delta \quad \text{এবং} \quad P \text{ একটি ধ্রুবরাশি।}$$

যেহেতু K নতুন হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক তাই লেখা যায় $K = E$ যেখানে E সামগ্রিক শক্তি। সুতরাং $P = E/\omega$ এবং

$$q = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}\sin(\omega t + \delta)$$

$$p = \sqrt{2mE}\cos(\omega t + \delta)$$

এই উদাহরণ থেকে দেখা যায় যে আইনানুগ রূপান্তরের মাধ্যমে পুরাতন হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষকের স্থলে একটি নতুন হ্যামিল্টনীয় পাওয়া যায় যা সমাধান করা অনেক সহজ। সরল স্পন্দকের উদাহরণে নতুন হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষকে Q পরিবর্তী রাশি নেই এবং তার অনুষঙ্গী ভরবেগ P একটি ধ্রুবরাশি। এই ধারণাই হ্যামিল্টন-জেকোবী পদ্ধতির মূল ভিত্তি।

৯·৬ পয়সন-বন্ধনী

আইনানুগ রূপান্তর তত্ত্বে পয়সন-বন্ধনীর একটি বিশেষ ভূমিকা আছে। পয়সন-বন্ধনীর সংজ্ঞা দেয়ার জন্যে আমরা কোন বস্তুনিচয়ের যে কোন গতিবিদ্যাসম্মত পরিবর্তী রাশি F কে আইনানুগ পরিবর্তী রাশির (q_i, p_i) অপেক্ষক নিতে পারি,

$$F = F(q_i, p_i, t)$$

সুতরাং

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i \qquad (৯.২৭)$$

এখন হ্যামিল্টনীয় গতিসমীকরণ ব্যবহার করে আমরা পাই,

$$\frac{dF}{dt} \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H]_{P.B} \qquad (৯.২৮)$$

যেখানে নিচের রাশিকে

$$[F, H]_{P.B} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (৯.২৯)$$

পয়সন-বন্ধনী বলে। সাধারণভাবে বলা যায় যে, যে-কোন দুটি গতিবিদ্যার রাশি X এবং Y এর জন্য পয়সন-বন্ধনীর সংজ্ঞা হল,

$$[X, Y]_{q.p} = \frac{\partial X}{\partial q_i}\frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i}\frac{\partial Y}{\partial q_i} \qquad (৯.৩০)$$

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে,

$$[q_i, q_j]_{q.p} = [p_i, p_j]_{q,p} = 0 \qquad (৯.৩১)$$

$$[q_i, p_j]_{q,p} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{যখন } i \neq j \\ 1 & \text{যখন } i = j \end{cases}$$

এবং

$$[X, Y] = -[Y, X]$$
$$[X, Y+Z] = [X, Y] + [X, Z] \qquad (৯.৩২)$$
$$[X, YZ] = Y[X, Z] + [X, Y]Z$$

এগুলিকে মৌলিক পয়সন-বন্ধনী বলে।

পয়সন-বন্ধনীর একটি গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য হল এই যে তারা আইনানুগ রূপান্তরের অধীনে অপরিবর্তী থাকে,

$$[X, Y]_{q,p} = [X, Y]_{Q,P} \qquad (৯.৩৩)$$

উদাহরণস্বরূপ,

$$[Q_i, P_j]_{q,p} = [Q_i, P_j]_{Q,P} = \delta_{ij}$$

যা (৯.২৬) সমীকরণ ব্যবহার করে সহজেই প্রমাণ করা যায়,

$$[Q_i, P_l]_{q,p} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_l}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_l}{\partial q_k}$$

$$= \frac{\partial Q_i}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_k}\frac{\partial P_l}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial p_k} - \cdots$$

$$= \frac{\partial Q_i}{\partial Q_k}\frac{\partial p_k'}{\partial P_k}\frac{\partial P_l}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial p_k} - \cdots$$

$$= \frac{\partial Q_i}{\partial Q_k}\frac{\partial P_l}{\partial P_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial P_k}\frac{\partial P_l}{\partial Q_k} = [Q_i, P_l]_{P,Q} = \delta_l$$

যে কোন দুটি অপেক্ষকের ক্ষেত্রে,

$$[X, Y]_{Q,P} = \frac{\partial X}{\partial Q_k}\frac{\partial Y}{\partial P_k} - \frac{\partial X}{\partial P_k}\frac{\partial Y}{\partial Q_k}$$

$$= \frac{\partial X}{\partial Q_k}\left(\frac{\partial Y}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial P_k} + \frac{\partial Y}{\partial p_l}\frac{\partial d_l}{\partial P_k}\right) - \frac{\partial X}{\partial P_k}\left(\frac{\partial Y}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial Q_k} + \frac{\partial Y}{\partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial Q_k}\right)$$

$$= \frac{\partial Y}{\partial q_l}[X, q_l]_{Q,P} + \frac{\partial Y}{\partial p_l}[X, p_l] \qquad (৯.৩৪)$$

সুতরাং

$$[q_k, Y]_{Q,P} = \frac{\partial Y}{\partial p_l}\delta_{kl} = \frac{\partial Y}{\partial p_k}$$

একইভাবে

$$[X, p_j]_{Q,P} = \frac{\partial X}{\partial q_j}$$

অতএব,

$$[X, Y]_{Q,P} = -\frac{\partial Y}{\partial q_l}\frac{\partial X}{\partial p_i} + \frac{\partial Y}{\partial p_l}\frac{\partial X}{\partial q_j}$$

$$= [X, Y]_{q,p}$$

যেহেতু পয়সন-বন্ধনী অনুষঙ্গী পরিবর্তী রাশির উপর নির্ভর করে না তাই বন্ধনীর নিচে পরিবর্তী রাশি দেখানোর প্রয়োজন হয় না।

যে কোন তিনটি অপেক্ষক X, Y, Z-এর জন্যে সংজ্ঞানুসারে

$$[X,[Y,Z]] = \left[X, \frac{\partial Y}{\partial q}\frac{\partial Z}{\partial p} - \frac{\partial Y}{\partial p}\frac{\partial Z}{\partial q}\right]$$

$$= \frac{\partial Y}{\partial q}\left[X, \frac{\partial Z}{\partial p}\right] + \left[X, \frac{\partial Y}{\partial q}\right]\frac{\partial Z}{\partial p}$$

$$- \frac{\partial Y}{\partial p}\left[X, \frac{\partial Z}{\partial q}\right] - \left[X, \frac{\partial Y}{\partial p}\right]\frac{\partial Z}{\partial q}$$

সুতরাং

$$[X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]]$$

$$= \frac{\partial Y}{\partial q}\left[X, \frac{\partial Z}{\partial p}\right] - \frac{\partial X}{\partial q}\left[Y, \frac{\partial Z}{\partial p}\right] - \frac{\partial Y}{\partial p}\left[X, \frac{\partial Z}{\partial q}\right]$$

$$+ \frac{\partial X}{\partial p}\left[Y, \frac{\partial Z}{\partial q}\right] + \left(\left[X, \frac{\partial Y}{\partial q}\right] + \left[\frac{\partial X}{\partial q}, Y\right]\right)\frac{\partial Z}{\partial p}$$

$$- \left(\left[X, \frac{\partial Y}{\partial d}\right] + \left[\frac{\partial X}{\partial d}, Y\right]\right)\frac{\partial Z}{\partial q}$$

যেহেতু প্রথম চারটি অংশের যোগফল শূন্য এবং যেহেতু,

$$\frac{\partial}{\partial x}[X,Y] = \left[\frac{\partial X}{\partial x}, Y\right] + \left[X, \frac{\partial Y}{\partial x}\right]$$

তাই আমরা পাই,

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] = \frac{\partial}{\partial q}[X,Y]\frac{\partial Z}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p}[X,Y]\frac{\partial Z}{\partial q}$$

$$= [[X,Y],Z]$$

সুতরাং

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \qquad (৯.৩৫)$$

এটাকেই বলে 'জেকোবী অভেদ'। পয়সন-বন্ধনীর জন্য এটি একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ অভেদ।

৯.৭ ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র সংযোগ-রূপান্তর

পদার্থবিজ্ঞানে অতি ক্ষুদ্র রূপান্তরের অর্থাৎ একক রূপান্তরের খুব কাছাকাছি রূপান্তরের বিশেষ ভূমিকা আছে। আমরা জানি যে সৃজনকারী অপেক্ষক

$$F_2 = q_i P_i$$

আসলে একক রূপান্তর সৃষ্টি করে অর্থাৎ এই রূপান্তরের অধীনে,

$$Q_i = q_i \qquad P_i = p_i$$

যদি ϵ একটি ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র রাশি হয় তাহলে পরিবর্তী রাশিগুলির মধ্যে অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তনের মান পাওয়া যাবে নিম্নলিখিত রূপান্তর অপেক্ষকের মাধ্যমে,

$$F_2 = q_i P_i + \epsilon G(q_i, p_i) \tag{৯.৩৬}$$

যেখানে G একটি অনির্ধারিত অপেক্ষক। এখন

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}$$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

সুতরাং

$$\delta q_i = Q_i - q_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}$$

$$\delta p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

যেহেতু p_i থেকে P_i তে পরিবর্তন ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র তাই লেখা যায়,

$$\delta q_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \qquad \delta p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \tag{৯.৩৭}$$

সাধারণত G অপেক্ষককেই ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র সংযোগ রূপান্তরের সৃজনকারী অপেক্ষক বলে। উদাহরণস্বরূপ যদি $\epsilon = dt$ এবং $G = H$ নেয়া হয়, তাহলে

$$\delta q_i = dt \frac{\partial H}{\partial p_i} = dt\, \dot{q}_i$$

$$\delta p_i = -dt \frac{\partial H}{\partial q_i} = dt\, \dot{p}_i$$

যা অবশ্যই প্রত্যাশিত।

এখন (q_i, p_i) পরিবর্তী রাশির অতিক্ষুদ্র পরিবর্তন $(\delta q_i, \delta p_i)$ সাধিত হলে গতিবিজ্ঞানের যে কোন পরিবর্তী রাশি $X = X(q_i, p_i, t)$-এর পরিবর্তন হবে,

$$\delta X = \frac{\partial X}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial X}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial X}{\partial t}\,dt$$

$$= \epsilon\left(\frac{\partial X}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial X}{\partial t}\,dt$$

সুতরাং আমরা পাই

$$\delta X = \epsilon\,[X, G]_{P.B.} + \frac{\partial X}{\partial t}\,dt \qquad (৯.৩৮)$$

অর্থাৎ X অপেক্ষকের পরিবর্তন X ও G দ্বারা গঠিত পয়সন-বন্ধনীর সমানুপাতিক (যখন X সময়ের উপর নির্ভরশীল নয়)। যদি আবার $\epsilon = dt$ এবং $G = H$ লেখা যায়, তাহলে

$$\delta X = dt\,[X, H] + \frac{\partial X}{\partial t}\,dt$$

অর্থাৎ

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + [X, H] \qquad (৯.৩৯)$$

যদি $X = q_i$ নেয়া যায়, তাহলে

$$\dot{q}_i = [q_i, H] \qquad (৯.৪০)$$

অর্থাৎ হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক H যে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র রূপান্তর সৃজন করে তা দিয়েই বস্তুর প্রকৃত গতি সৃষ্টি হয়।

আবার (৯.৩৮) সমীকরণে $X = H$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$\delta H = \epsilon\,[H, G]$$

যখন H প্রত্যক্ষভাবে সময়ের উপর নির্ভরশীল নয়। সুতরাং যদি

$$[H, G] = 0$$

হয় তাহলে গতির ধ্রুবক ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্রের সেই ধরনের রূপান্তর সৃজন করে যার সাপেক্ষে H অপরিবর্তী।

৯·৮ আইনানুগ রূপান্তরের সিম্পলেকটিক শর্ত

আমরা জানি গতিময় বস্তুনিচয়ের অবস্থা নির্দেশ করার জন্য সাধারণীকৃত অবস্থান q_i এবং ভরবেগ p_i অক্ষাংশের প্রয়োজন হয় $(i = 1, 2, \ldots, n)$। যেহেতু হ্যামিল্টনীয় গতিতত্ত্বে অবস্থান এবং ভরবেগ সমপর্যায়ভুক্ত তাই তাদের প্রতিসাম্য পরিষ্কার করে দেখানো প্রয়োজন। এজন্য একটি স্তম্ভ সদিক রাশি Z এর সংজ্ঞা দেয়া হয়,

$$z = \begin{pmatrix} z_i \\ z_{n+i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_i \\ p_i \end{pmatrix} \qquad (৯.৪১)$$

যার প্রথম n উপাংশ q_i এবং দ্বিতীয় n উপাংশ p_i। সুতরাং হ্যামিল্টনের গতি-সমীকরণ এখন একত্রে লেখা যায় এভাবে,

$$\dot{z} = J \frac{\partial H}{\partial z} \qquad (৯.৪২)$$

যেখানে

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (৯.৪৩)$$

কেননা

$$\dot{z}_i = \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial z_{n+i}} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

এবং

$$\dot{z}_{n+i} = \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial z_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

লক্ষ্য করা দরকার যে J মেট্রিক্স উল্লম্ব,

$$J^T J = 1 \quad \text{এবং} \quad J^2 = -1$$

সুতরাং $\qquad J^T = J^{-1} = -J$

আমরা আগেই দেখেছি যে যদি ϵ একটি ক্ষুদ্র রাশি হয় তবে পরিবর্তী রাশির ক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য সৃজনকারী অপেক্ষক লেখা যায়,

$$F_2 = q_i P_i + \epsilon X$$

এবং সেক্ষেত্রে (q_i, p_i) অক্ষাংশের পরিবর্তন হল

$$\delta q_i = \epsilon \frac{\partial X}{\partial p_i} \qquad \delta p_i = -\epsilon \frac{\partial X}{\partial q_i}$$

যেখানে $\epsilon X(z, t)$ হল উক্ত ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র রূপান্তরের সৃজনকারী অপেক্ষক এবং ϵ একটি অতি ক্ষুদ্র রাশি। সুতরাং একইভাবে লেখা যায়,

$$\delta z = \epsilon J \frac{\partial X}{\partial z} \qquad (৯.৪৪)$$

এখন এক টি নতুন পরিবর্তী রাশির গুচ্ছ (Q_i, P_i) প্রবর্তন করে আমরা আবার লিখতে পারি,

$$Z = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$$

এবং আইনানুগ রূপান্তরের জন্যে, নতুন Z পুরাতন z এর অপেক্ষক হবে,

$$Z = Z(z)$$

সময়ের উপর অন্তরকলন করে,

$$\dot{Z} = \frac{\partial Z}{\partial z} \dot{z} = M \dot{z} \qquad (৯.৪৫)$$

যেখানে M হল জেকোবী মেট্রিক্স যার উপাংশগুলি লেখা যায়,

$$M_{ij} = \frac{\partial Z_i}{\partial z_j}$$

সমীকরণ (৯.৪২) ব্যবহার করে,

$$\dot{Z} = MJ \frac{\partial H}{\partial z} \qquad (৯.৪৬)$$

কিন্তু যেহেতু $z = z(Z)$, তাই

$$\frac{\partial H}{\partial z_i} = \frac{\partial H}{\partial Z_j} \frac{\partial Z_j}{\partial z_i} = M_{ji} \frac{\partial H}{\partial Z_i}$$

অর্থাৎ

$$\frac{\partial H}{\partial z} = M^T \frac{\partial H}{\partial Z}$$

সুতরাং

$$\dot{Z} = MJM^T \frac{\partial H}{\partial Z} \qquad (৯.৪৭)$$

কিন্তু আইনানুগ রূপান্তরের শর্ত অনুযায়ী নতুন পরিবর্তী রাশিতে হ্যামিল্টনীয় গতিসমীকরণ হবে,

$$\dot{Z} = J\frac{\partial H}{\partial Z} \qquad (৯.৪৮)$$

সুতরাং এই রূপান্তর

$$Z = Z(z)$$

আইনানুগ হয় যখন

$$MJM^T = J \qquad (৯.৪৯)$$

এটাকেই বলে আইনানুগ রূপান্তরের সিম্পলেকটিক শর্ত এবং যে M মেট্রিক্স এই শর্ত মানে তাকে 'সিম্পলেকটিক মেট্রিক্স' বলে। (৯.৪৪) সমীকরণে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র রূপান্তরের জন্যে পরিবর্তন দেয়া হয়েছে

$$\delta z = \epsilon J\frac{\partial X}{\partial z}$$

কিন্তু ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র রূপান্তরের জেকোবী মেট্রিক্স লেখা যায়

$$M = \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(z + \delta z)$$

$$= 1 + \frac{\partial}{\partial z}\left(\epsilon J \frac{\partial X}{\partial z}\right)$$

$$= 1 + \epsilon J \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial z} \qquad (৯.৫০)$$

যেখানে মেট্রিক্সের উপাংশ হিসেবে

$$\left(\frac{\partial^2 X}{\partial z \partial z}\right)_{ij} = \frac{\partial^2 X}{\partial z_i \partial z_j}$$

এখন যেহেতু J একটি বিপরীত প্রতিসাম্যের মেট্রিক্স, তাই $J^T = -J$ এবং (৯.৫০) সমীকরণ থেকে,

$$M^T = 1 + \epsilon \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial z} J^T$$

$$= 1 - \epsilon \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial z} J$$

সুতরাং

$$MJM^T = \left(1 + \epsilon J \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial z}\right) J \left(1 - \epsilon \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial z} J\right)$$

$$= J + \epsilon \left(J \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial z} J - J \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial z} J\right) + O(\epsilon^2)$$

$$= J + O(\epsilon^2) \qquad (৯.৫১)$$

অর্থাৎ যে কোন ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র সংযোগ রূপান্তরের ক্ষেত্রে সিম্পলেকটিক শর্ত অব্যাহত থাকে।

এই মেট্রিক্স পদ্ধতিতে পয়সন-বন্ধনী লেখা যায়,

$$[X, Y]_z = \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^T J \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right) \qquad (৯.৫২)$$

কেননা ডানদিকে আমরা পাই

$$\left(\frac{\partial X}{\partial p_i} \quad \frac{\partial X}{\partial q_i}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial Y/\partial q_i \\ \partial Y/\partial p_i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i} \frac{\partial Y}{\partial q_i}$$

মৌলিক পয়সন-বন্ধনীগুলিকেও একটি সমীকরণ

$$[z, z]_z = J \qquad (৯.৫৩)$$

দিয়ে প্রকাশ করা যায় কেননা

$$\left[z_i, z_{n+j}\right]_z = \left[q_i, p_j\right]_{q,p} = J_{ij} = \delta_{ij}$$

আবার (X, Y)কে একটি স্তম্ভ মেট্রিক্স হিসেবে লিখে

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

৯.৫২ সমীকরণকে লেখা যায়

$$[Z, Z]_z = \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^T J \begin{pmatrix} \partial Z \\ \partial z \end{pmatrix}$$

$$= M^T J M \qquad (৯.৫৪)$$

যেখানে M রূপান্তরের 'জেকোবী অপেক্ষক'

$$M = \frac{\partial Z}{\partial z}$$

যেহেতু আইনানুগ রূপান্তরের জন্য $M^T J M = J$, সুতরাং

$$[Z, Z]_z = J \qquad (৯.৫৫)$$

এটিই মৌলিক পয়সন-বন্ধনী। ৯.৫৩ সমীকরণ

$$[z, z]_z = J$$

থেকে লেখা যায়,

$$[Z, Z]_Z = J \qquad (৯.৫৬)$$

সুতরাং (৯.৫৫) এবং (৯.৫৬) সমীকরণের তাৎপর্য হল এই যে মৌলিক পয়সন-বন্ধনী আইনানুগ রূপান্তরের অধীনে অপরিবর্তী থাকে।

আসলে সব পয়সন-বন্ধনী সংযোগ-রূপান্তরের অধীনে অপরিবর্তী থাকে। ধরা যাক আমাদের পয়সন-বন্ধনী হল,

$$[X, Y]_z$$

কিন্তু আগেই বলা হয়েছে,

$$\frac{\partial H}{\partial z} = M^T \frac{\partial H}{\partial Z}$$

একইভাবে

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = M^T \frac{\partial Y}{\partial Z}$$

এবং

$$\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^T = \left(M^T \frac{\partial X}{\partial Z}\right)^T = \left(\frac{\partial X}{\partial Z}\right)^T M$$

সুতরাং (৯.৫২) সমীকরণ থেকে,

$$[X, Y]_z = \left(\frac{\partial X}{\partial Z}\right)^T MJM^T \left(\frac{\partial Y}{\partial Z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial X}{\partial Z}\right)^T J \left(\frac{\partial Y}{\partial Z}\right)$$

$$= [X, Y]_Z$$

অর্থাৎ সব পয়সন-বন্ধনী আইনানুগ রূপান্তরের অধীনে অপরিবর্তী।

বাস্তবিকপক্ষে পয়সন-বন্ধনীর এই বৈশিষ্ট্যের জন্যেই চিরায়ত গতিবিদ্যা থেকে কোয়ান্টাম গতিবিদ্যায় 'স্বচ্ছন্দে' অতিক্রমণের সহজতর পথ হল পয়সন-বন্ধনীর মাধ্যমে যাওয়া। চিরায়ত গতিবিদ্যার অপেক্ষকগুলিকে কারকে পরিবর্তিত করে এবং পয়সন-বন্ধনীকে বিনিময়কারকে (commutator) পরিবর্তিত করলেই কোয়ান্টাম গতিবিদ্যা পাওয়া যায়।

৯·৯ লাগ্রাঞ্জ বন্ধনী

ধরা যাক আইনানুগ পরিবর্তী রাশি (q_i, p_i) এর যে কোন দুটি অপেক্ষক হল (X, Y)। লাগ্রাঞ্জ বন্ধনীর সংজ্ঞা হল,

$$\{X, Y\}_{q,p} = \frac{\partial q_i}{\partial X} \frac{\partial p_i}{\partial Y} - \frac{\partial q_i}{\partial Y} \frac{\partial p_i}{\partial X} \qquad (৯.৫৭)$$

অথবা মেট্রিক্স পদ্ধতিতে

$$\{X, Y\}_z = \left(\frac{\partial z}{\partial X}\right)^T J \left(\frac{\partial z}{\partial Y}\right) \qquad (৯.৫৮)$$

এই লাগ্রাঞ্জ বন্ধনী আইনানুগ রূপান্তরের অধীনে অপরিবর্তী থাকে, কেননা

$$\{X, Y\}_Z = \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^T J \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)$$

কিন্তু

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial Y} = M\frac{\partial z}{\partial Y}$$

যেখানে M হল সংযোগ-রূপান্তরের জেকোবী অপেক্ষক। সুতরাং

$$\{X, Y\}_Z = \left(\frac{\partial z}{\partial X}\right)^T M^T J M \left(\frac{\partial z}{\partial Y}\right)$$

$$= \{X, Y\}_z$$

যেহেতু

$$M^T JM = J \ ।$$

লক্ষ্য করা দরকার যে 'মৌলিক লাগ্রাঞ্জ বন্ধনী' হল

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$$

এবং

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

লাগ্রাঞ্জ এবং পয়সন-বন্ধনী পরস্পরের 'বিপরীত''। ধরা যাক $X_i\ (i = 1, 2 \ldots 2n)$ আইনানুগ পরিবর্তী রাশির 2n সংখ্যক স্বতন্ত্র অপেক্ষক। সুতরাং লাগ্রাঞ্জ বন্ধনী

$$\{X, Y\}$$

একটি $2n \times 2n$ মাত্রার মেট্রিক্স। একইভাবে

$$[X, Y]$$

একটি $2n \times 2n$ মাত্রার মেট্রিক্স। এখন (৯.৫৮) সমীকরণ থেকে

$$\{X, Y\}_z\ [Y, X]_z = \left(\frac{\partial z}{\partial X}\right)^T J \left(\frac{\partial z}{\partial Y}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)^T J\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial X}\right)^T J^2\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)$$

$$= -1$$

যেহেতু $J^2 = -1$ ।

৯·১০ দশাস্থানের ক্ষুদ্র ঘন অংশের অপরিবর্তন

আমরা জানি যে অবস্থান এবং ভরবেগ $(q_i, p_i) = z_i$ অক্ষাংশ দিয়ে দশাস্থান সংজ্ঞায়িত হয়। এই দশাজগতে ক্ষুদ্র ঘন অংশ হল

$$dz = dq_1\ dq_2 \cdots dq_n\ dp_1\ dp_2 \cdots dp_n$$

নতুন আর এক দশাজগতে রূপান্তর করলে ঘন অংশ হবে,

$$dZ = dQ_1 \cdots dQ_n\ dP_1 \cdots dP_n$$

উভয় ঘন অংশ পরস্পরের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট এবং তাদের মধ্যে সম্পর্ক লেখা যায়,

$$dZ = \det M\, dz$$

যেখানে det M হল জেকোবী নির্ণায়ক এবং

$$M = \frac{\partial Z}{\partial z}$$

সিম্পলেক্টিক শর্ত

$$M J M^T = J$$

থেকে লেখা যায়,

$$(\det M)(\det J)(\det M) = \det J$$

অতএব

$$(\det M)^2 = 1$$

সুতরাং $\det M = \pm 1$। কিন্তু যেহেতু

$$|\det M| = 1$$

তাই ঘন অংশের মান অপরিবর্তী,

$$|dZ| = |dz|$$

প্রশ্নমালা

১। প্রমাণ কর যে নিম্নলিখিত রূপান্তরগুলি আইনানুগ

(ক) $Q = q + pt + \frac{1}{2}gt^2$ $\qquad P = p + gt$

(খ) $Q = q\cos\omega t + \frac{p}{\omega}\sin\omega t \quad P = -\omega q\sin\omega t + p\cos\omega t$

২। প্রমাণ কর যে নিম্নলিখিত রূপান্তর

$$Q = f(q)\cos p \qquad P = f(q)\sin p$$

একটি আইনানুগ রূপান্তর হওয়ার শর্ত হল

$$f f' = 1$$

৩। প্রমাণ কর যে নিম্নলিখিত রূপান্তর

$$Q = e^{kp}\sqrt{q+a} \qquad P = -\frac{1}{k}e^{-kp}\sqrt{q+p}$$

একটি আইনানুগ রূপান্তর।

৪। প্রমাণ কর যে নিচের রূপান্তর

$$P = \tfrac{1}{2}(p+q^2) \qquad Q = \tan\frac{q}{p}$$

একটি আইনানুগ রূপান্তর।

৫। দেখাও যে

(ক) $Q = \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right) \qquad P = q\cot p$

(খ) $Q = \tan^{-1}\frac{\alpha q}{p} \qquad P = \frac{\alpha q^2}{2}\left(1 + \frac{p^2}{\alpha^2 q^2}\right)$

রূপান্তরগুলি আইনানুগ।

৬। দেখাও যে রূপান্তর সমীকরণ

$Q = \ln(1+\sqrt{q}\cos p) \quad P = 2(1+\sqrt{q}\cos p)\sqrt{q}\sin p$

আইনানুগ এবং সৃজনকারী অপেক্ষক হল

$$F_3 = -(e^Q - 1)^2\tan p$$

৭। সৃজনকারী অপেক্ষক

$$F_1(q, Q) = \lambda q^2\cot Q$$

হলে (λ ধ্রুবরাশি) আইনানুগ রূপান্তর নির্ধারণ কর। যদি (q, p) প্রতিকৃতিতে হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক লেখা যায়

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

তবে $H(Q, P)$ কি হবে?

৮। দেখাও যে নিচের রূপান্তর

$$Q = p + iaq \qquad P = \frac{1}{Z_{1a}}(p - iaq)$$

আইনানুগ এবং এক্ষেত্রে একটি সৃজনকারী অপেক্ষক নির্ধারণ কর। এই রূপান্তর ব্যবহার করে রৈখিক ছন্দিত দোলকের সমস্যা সমাধান কর।

৯। কোন শর্তের অধীনে নিচের রূপান্তর

$$Q = \alpha \frac{p}{x} \qquad P = \beta x^2$$

আইনানুগ? একটি উপযোগী সৃজনকারী অপেক্ষক নির্ধারণ কর এবং তা ব্যবহার করে রৈখিক ছন্দিত দোলকের সমস্যা সমাধান কর।

১০। একটি নতুন অক্ষাংশ Q-এর সংজ্ঞা হল

$$Q = \tan^{-1}\left(\lambda \frac{q}{P}\right)$$

যেখানে λ একটি ধ্রুবরাশি। দেখাও যে Q এর অনুষঙ্গী ভরবেগ হল

$$P = (p^2 + \lambda^2 q^2) / 2\lambda + f\left(\lambda \frac{q}{P}, t\right)$$

যেখানে f একটি অনির্ধারিত অপেক্ষক। এই রূপান্তর রৈখিক দোলকের হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষকে

$$H = p^2 / 2m + \tfrac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

প্রয়োগ কর এবং Q ও P এর জন্য সমাধান কর। তা থেকে q এবং p সময়ের অপেক্ষক হিসেবে প্রকাশ কর।

দশম অধ্যায়

হ্যামিলটন-জেকোবী সমীকরণ

গতিবিজ্ঞানে সমস্যা সমাধানের একটি সাধারণ পদ্ধতি পাওয়া যায় আইনানুগ রূপান্তরের মাধ্যমে। আইনানুগ রূপান্তরের ধারণা বাস্তবায়ন সম্ভব হয় সৃজনকারী অপেক্ষক নির্ধারণ করে। হ্যামিলটন-জেকোবী পদ্ধতি এই সৃজনকারী অপেক্ষক নির্ণয় করার একটি প্রত্যক্ষ উপায়। এই পদ্ধতিতে যে রূপান্তর অপেক্ষক পাওয়া যায় তা দিয়ে হ্যামিল্টনের গতিসমীকরণ সমাধান করা যায়। হ্যামিল্টন-জেকোবী পদ্ধতির মূল কথা হল এই যে, নতুন অবস্থান এবং ভরবেগ অক্ষাংশগুলি সময়ের পরিপ্রেক্ষিতে ধ্রুবক এবং তাই হ্যামিলটনীয় গতিসমীকরণ সমাধান করা সহজ।

১০.১ হ্যামিল্টনীয়-জেকোবী সমীকরণ

আমরা জানি যে, পুরাতন পরিবর্তী রাশি (q_i, p_i) থেকে নতুন পরিবর্তী রাশি (Q_i, P_i) তে সংযোগ বা আইনানুগ রূপান্তর করার ফলে একটি নতুন হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক পাওয়া যায়,

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial t} \qquad (১০.১)$$

যেখানে F_1 একটি সৃজনকারী অপেক্ষক এবং পুরাতন পরিবর্তী রাশি (q, p) আর নতুন পরিবর্তী রাশি (Q, P)-এর মধ্যে সংযোগকারী সমীকরণ হল

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \qquad P_i = -\frac{\partial F_i}{\partial Q_i} \qquad (১০.২)$$

নতুন পরিবর্তী রাশিতে হ্যামিল্টনীয় গতিসমীকরণ হল

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \qquad (১০.৩)$$

আমরা একটি রূপান্তর নির্ধারণ করতে চাই যার ফলে এই গতিসমীকরণগুলি সমাধান করা সহজ হবে। যদি $K = 0$ হয় তাহলে Q এবং P ধ্রুবক হয়,

$$Q_i = \alpha_i \qquad P_i = \beta_i \qquad \text{যখন} \quad K = 0 \qquad (১০.৪)$$

এখন এই 2n সংখ্যক ধ্রুবরাশি (α_i, β_i) অবস্থান এবং ভরবেগ অক্ষাংশের প্রাথমিক মানের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট করা যায়। যখন $K = 0$, তখন (১০.১) সমীকরণ থেকে

$$H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0 \qquad (১০.৫)$$

যেখানে (১০.৪) সমীকরণ থেকে,

$$F_1 = F_1(q, Q, t) = F_1(q, \alpha, t) \qquad (১০.৬)$$

এবং (১০.২) সমীকরণ থেকে

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \qquad \beta_i = -\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_i} \qquad (১০.৭)$$

সুতরাং (১০.৫) সমীকরণ থেকে

$$H\left(q, \frac{\partial F_1}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0 \qquad (১০.৮)$$

এটি একটি $n+1$ সংখ্যক স্বতন্ত্র পরিবর্তী রাশি (q_i, t) এর উপর নির্ভরশীল প্রথম পর্যায়ের অন্তরকলন সমীকরণ যাকে হ্যামিল্টন-জেকোবী সমীকরণ বলে। এই সমীকরণের সমাধানে $n+1$ সংখ্যক সমাকলন ধ্রুবরাশি থাকবে। কিন্তু যেহেতু F_1 কেবল আংশিক অন্তবকলন $\partial F_1/\partial t$ হিসেবে (১০.৮) সমীকরণে উপস্থিত, তাই একটি সমাকলন ধ্রুবক যৌগিক এবং তাকে বাদ দেয়া যেতে পারে। সুতরাং আমরা সমাধান এভাবে লিখতে পারি,

$$F_1 = F_1(q_1, \ldots q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t) \qquad (১০.৯)$$

এবং (১০.৭) সমীকরণ ব্যবহার করে q_i, p_i পরিবর্তী রাশিগুলি α_n, β_n এবং t এর অপেক্ষক হিসেবে প্রকাশ করতে পারি,

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(\alpha_n, \beta_n, t) \\ p_i &= p_i(\alpha_n, \beta_n, t) \end{aligned} \qquad (১০.১০)$$

এভাবেই গতিবিজ্ঞানের সমস্যা সম্পূর্ণ সমাধান করা যায়। কিন্তু প্রশ্ন হচ্ছে যে সৃজনকারী অপেক্ষকের প্রকৃতি কি? তার ভৌত তাৎপর্য কি?

যেহেতু Q_i এখন ধ্রুবরাশি এবং $K = 0$, সুতরাং আইনানুগ রূপান্তরের সমীকরণ

$$p_i dq_i - P_i dQ_i - (H - K)dt = dF_i(q, Q)$$

থেকে আমরা পাই

$$dF_1 = p_i dq_i - Hdt$$

সুতরাং

$$\frac{dF_1}{dt} = p_i \dot{q}_i - H$$

$$= L$$

সমাকলন করে,

$$F_1(q, Q) = \int_{t_0}^{t} L\, dt \qquad (১০.১১)$$

যেখানে t_0 হল প্রাথমিক সময়। কিন্তু আমরা জানি যে ডানদিকের সমাকলনকে কার্যকরী (action) সমাকলন বলে,

$$S = \int_{t_0}^{t} I\, dt$$

সুতরাং সৃজনকারী অপেক্ষক F_1 হ্যামিল্টন-জেকোবী পদ্ধতিতে আসলে কার্যকরী সমাকলন ছাড়া আর কিছুই নয়। এটিকে হ্যামিল্টনের 'প্রধান (principal) অপেক্ষক' বলে।

এখন ধরা যাক যে হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক H প্রত্যক্ষভাবে সময়ের উপর নির্ভরশীল নয়, অর্থাৎ

$$H = H(q, p)$$

সেক্ষেত্রে (১০.৮) সমীকরণ লেখা যায়,

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \qquad (১০.১২)$$

এই সমীকরণ সমাধান করে পাওয়া যায়,

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - Et \qquad (১০.১৩)$$

যেখানে $W(q, \alpha)$ অপেক্ষক নিচের সমীকরণকে সার্থক করে,

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E \qquad (১০.১৪)$$

অর্থাৎ E ধ্রুবরাশি আসলে বস্তুনিচয়ের সামগ্রিক শক্তি। এই সমীকরণকে অনেক সময়ে পরিমার্জিত হ্যামিল্টন-জেকোবী সমীকরণ বলে। এখন (১০.৭) সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \qquad (১০.১৫)$$

কিন্তু ঐ সমীকরণের দ্বিতীয় অংশ,

$$\beta_i = -\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i}$$

সরাসরি ব্যবহার করা যায় না, কেননা সব α_i ধ্রুবরাশি পরস্পর নিরপেক্ষ নয়। আমরা α_i ধ্রুবরাশির একটিকে E নাম দেই,

$$\alpha_1 = E \qquad (১০.১৬)$$

সুতরাং

$$\beta_1 = -\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = t - \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}$$

$$\beta_i = -\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \quad \text{যখন } i \neq 1 \qquad (১০.১৭)$$

নির্দিষ্ট সমস্যায় এই সমীকরণগুলি থেকে অবস্থান স্থানাঙ্ক পাওয়া যায়।

আমরা এখানে হ্যামিল্টন-জেকোবী পদ্ধতি F_1 সৃজনকারী অপেক্ষকের মাধ্যমে ব্যাখ্যা করেছি। অন্য সৃজনকারী অপেক্ষকগুলিও ব্যবহার করা যায়। যেমন F_2 ব্যবহার করার জন্যে আমরা লিখতে পারি,

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + Q_i P_i \qquad (১০.১৮)$$

যেখানে

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \tag{১০.১৯}$$

আবার আমরা দাবি করি যে নতুন আইনানুগ পরিবর্তী রাশিগুলি (Q_i, P_i) ধ্রুব-রাশি হবে এবং নতুন হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক K শূন্য হবে। সুতরাং এক্ষেত্রে আগের মতোই হ্যামিল্টন-জেকোবী সমীকরণ হল,

$$H\left(q, \frac{\partial F_2}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \tag{১০.২০}$$

অবশ্যই এই পদ্ধতি পূর্বের পদ্ধতি থেকে পৃথক কিছু নয় কেননা (১০.১৭) সমী-করণ থেকে এটি স্পষ্ট যে F_2 এবং F_1 এর পার্থক্য একটি যৌগিক ধ্রুবরাশি যখন Q_i এবং P_i ধ্রুবক।

উদাহরণ ১

হ্যামিল্টন-জেকোবী সমীকরণের সহজ উদাহরণ হিসেবে আমরা একমাত্রিক সুষম স্পন্দক নিতে পারি যার হ্যামিলটনীয় অপেক্ষক হল,

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

যেহেতু হ্যামিলটনীয় অপেক্ষক সময়ের উপর প্রত্যক্ষভাবে নির্ভরশীল নয় তাই (১০.১৩) সমীকরণ ব্যবহার করে আমরা পাই,

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = E$$

কেননা এক্ষেত্রে

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}$$

সুতরাং লেখা যায়,

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}$$

অতএব

$$W = \int \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}\ dq$$

এবং (১০.১৬) সমীকরণ থেকে

$$\beta = t - \frac{\partial W}{\partial E} = t - \frac{1}{\omega}\int \frac{dq}{\sqrt{2E/m\omega^2 - q^2}}$$

$$= t - \frac{1}{\omega}\sin^{-1}\sqrt{(m\omega^2/2E)}\, q$$

সুতরাং

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin\omega(t-\beta)$$

এবং

$$p = \sqrt{2mE}\cos\omega(t-\beta)$$

১০.২ বিশ্লিষ্টকরণযোগ্য বস্তুনিচয়

আমরা পূর্বের মতোই এমন বস্তুনিচয় নেই যাদের হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক প্রত্যক্ষভাবে সময়ের উপর নির্ভরশীল নয়। ধরা যাক যে হ্যামিল্টনের প্রধান অপেক্ষক এভাবে লেখা যায়,

$$S(q, \alpha, t) = \sum_{i=1}^{n} W_i(q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) - \alpha_1 t \qquad (১০.২১)$$

সুতরাং পরিমার্জিত হ্যামিল্টন-জেকোবী সমীকরণ হল

$$H_i\left(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}, \alpha_1 \ldots, \alpha_n\right) = \alpha_{i+1} \quad i = 1, \ldots, n \qquad (১০.২২)$$

এই n সমীকরণের প্রত্যেকটি শুধু q_i এর উপরে নির্ভরশীল। এ রকম ক্ষেত্রে বস্তুনিচয়কে বিশ্লিষ্টকরণযোগ্য বলে।

এখানে (১০.২১) সমীকরণগুলি এ ধরনের

$$\frac{\partial W_i}{\partial q_i} = f_i(q_i, \alpha_1 \ldots \alpha_n) \qquad (১০.২৩)$$

যা পর পর সমাকলন করা যায় এমনভাবে যে q_1 এর সমাধান একটি ধ্রুবরাশি নিয়ে আসে, তারপরে q_2 এর সমাধান দ্বিতীয় আর একটি ধ্রুবরাশি যোগ করে ইত্যাদি।

ধরা যাক আমরা (১০.১৪) সমীকরণ নেই,

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1 \qquad (১০.২৪)$$

যদি বস্তুনিচয় বিশ্লিষ্টকরণযোগ্য হয় তাহলে আমরা q_1-এর অংশ আলাদা করে ফেলতে পারি,

$$H_1\left(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1}, \alpha_1\right) = H_1'\left(q_2 \ldots q_n, \frac{\partial W_2}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W_n}{\partial q_n}, \alpha_1\right) \qquad (১০.২৫)$$

স্পষ্টতই এই সমীকরণ সার্থক করতে হলে উভয় অংশ একটি ধ্রুবকের সমান হতে হবে,

$$\begin{aligned} H_1\left(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1}, \alpha_1\right) &= \alpha_2 \\ H_1'\left(q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial W_2}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W_n}{\partial q_n}, \alpha_1\right) &= \alpha_2 \end{aligned} \qquad (১০.২৬)$$

এখানে প্রথম সমীকরণটি একটি সাধারণ অন্তরকলন সমীকরণ যা সমাধান করে $W_1 = W_1(q_1, \alpha_1, \alpha_2)$ পাওয়া যায়। সুতরাং দ্বিতীয় সমীকরণ আবার বিশ্লিষ্ট করা যায়,

$$\begin{aligned} &H_2\left(q_2 \frac{\partial W_2}{\partial q_2}, \alpha_1, \alpha_2\right) \\ &= H_2'\left(q_3, \ldots, q_n, \frac{\partial W_3}{\partial q_3}, \ldots, \frac{\partial W_3}{\partial q_n}, \alpha_1, \alpha_2\right) = \alpha_3 \end{aligned} \qquad (১০.২৭)$$

আবার নিচের সমীকরণ

$$H_2\left(q_2, \frac{\partial W_2}{\partial q_2}, \alpha_1, \alpha_2\right) = \alpha_3$$

সমাধান করে পাওয়া যায়,

$$W_2 = W_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

এই প্রক্রিয়ার n সংখ্যক পুনরাবৃত্তি (১০.২২) সমীকরণের সাধারণ সমাধান দেয়। লক্ষ্য করা দরকার যে, সব শেষের বিশ্লিষ্টকরণ থেকে পাওয়া যায়,

$$H_{n-1}\left(q_{n-1}, \frac{\partial W_{n-1}}{\partial q_{n-1}}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}\right) = \alpha_n$$

বিশ্লিষ্টকরণ প্রক্রিয়া নির্ভর করে স্থানাঙ্ক সঠিকভাবে পছন্দ করার উপর, বস্তু-নিচয়ের কোন নিজস্ব গুণের উপর নয়। একটি উল্লেখযোগ্য বস্তুনিচয় হল যখন কোন স্থানাঙ্ক পর্যায়বৃত্তিক (cyclic) বা বাতিলযোগ্য (ignorable)। ধরা যাক বস্তুনিচয়ের সব সাধারণীকৃত অবস্থান স্থানাঙ্ক পর্যায়বৃত্তিক শুধু q_1 ছাড়া। আমরা পরিমার্জিত হ্যামিল্টন-জেকোবী সমীকরণের সমাধান এভাবে লিখতে পারি,

$$W = \sum_i W_i(q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \qquad (১০.২৮)$$

যেহেতু q_i পরিবর্তী রাশির অনুষঙ্গী রাশি ধ্রুবক,

$$p_i = \frac{\partial W_i}{\partial q_i} = \alpha_i \qquad i \neq 1 \qquad (১০.২৯)$$

তাই পরিমার্জিত হ্যামিল্টন-জেকোবী সমীকরণকে লেখা যায়,

$$H\left(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1}, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) = \alpha_1 \qquad (১০.৩০)$$

(১০.২৮) সমীকরণের সমাধান হল

$$W_i = \alpha_i q_i \qquad i \neq 1$$

এবং (১০.৩০) সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,

$$W_1 = W_1(q_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

অতএব

$$W = W_1(q_1, \alpha_1 \ldots, \alpha_n) + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i q_i \qquad (১০.৩১)$$

উদাহরণ ২

কেন্দ্রীয় বলের সমস্যা আলোচনা করা যায়। বস্তুগতির কক্ষপথের তলে মেরুবর্তী অক্ষাংশ (r, θ) নিয়ে হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক আমরা লিখতে পারি,

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2\right) + V(r)$$

যেখানে p_r এবং p_θ যথাক্রমে r এবং θ অবস্থান অক্ষাংশের অনুষঙ্গী ভরবেগ রাশি। যেহেতু এখানে θ বাতিলযোগ্য রাশি (অর্থাৎ θ প্রত্যক্ষভাবে উপস্থিত হয় নি), তাই হ্যামিল্টনের প্রধান অপেক্ষককে লেখা যায়,

$$W = W_1(r) + \alpha_2 \theta$$

যেখানে

$$\alpha_2 = \frac{\partial W}{\partial \theta} = p_\theta = \text{ধ্রুবরাশি} = l$$

সুতরাং হ্যামিলটন-জেকোবী সমীকরণ হল,

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2}\right] + V = \alpha_1 = E$$

সুতরাং

$$\frac{\partial W_1}{\partial r} = \sqrt{2m(E-V) - \frac{l^2}{r^2}}$$

সমাধান করে,

$$W_1 = \int \sqrt{2m(E-V) - \frac{l^2}{r^2}}\, dr$$

এখন আমরা ব্যবহার করতে পারি,

$$\beta_1 = t - \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = t - \frac{\partial W}{\partial E}$$

$$\beta_2 = -\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = -\frac{\partial W}{\partial l} = -\frac{\partial W_1}{\partial l} - \theta$$

সুতরাং

$$\beta_1 = t - \int \frac{m\, dr}{\sqrt{2m(E-V) - \frac{l^2}{r^2}}}$$

এবং

$$\beta_2 = \int \frac{l\, dr}{r^2\sqrt{2m(E-V) - \frac{l^2}{r^2}}} - \theta$$

এই দুই সমীকরণে যথাক্রমে $\beta_1 = t_o$ এবং $\beta_2 = -\theta_o$ লিখে পাওয়া যায়,

$$t = t_o + \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}$$

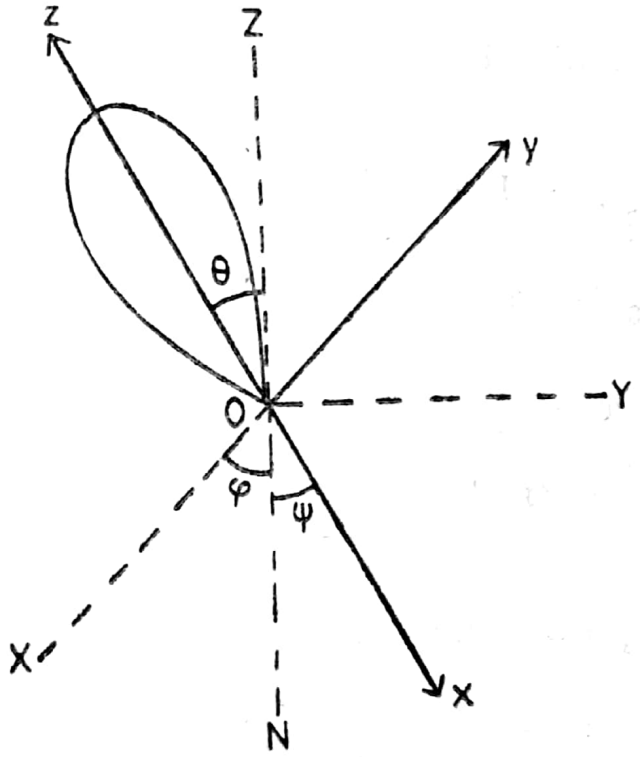
এবং

$$\theta = \theta_0 + \frac{l}{m}\int \frac{dr}{r^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}$$

এ দুটি সমাকলন চতুর্থ অধ্যায়ে সমাধান করা হয়েছে যখন $V = V(r)$।

উদাহরণ ৩

হ্যামিল্টন-জেকোবী পদ্ধতির আর একটি সুন্দর উদাহরণ হল ভারী, প্রতি-সাম্যযুক্ত লাট্টুর ঘূর্ণনের সমস্যা। এই সমস্যা সমাধানে অয়লার কোণ (φ, θ, ψ) ব্যবহার করা যুক্তিসঙ্গত (চিত্র ১০.১)।



চিত্র : ১০.১

চিত্রে O বিন্দু লাট্টুর স্থিরবিন্দু, OXYZ স্থানাঙ্ক মহাকাশে স্থির এবং Oxyz স্থানাঙ্ক লাট্টুর সঙ্গে ঘূর্ণমান স্থানাঙ্ক। যেহেতু ON পাদরেখা তাই $\angle XON = \varphi$, $\angle NOx = \psi$ এবং $\angle ZOz = \theta$। এখন ω_1, ω_2, ω_3 যদি বস্তুর সঙ্গে সংযুক্ত স্থানাঙ্কে কৌণিক গতিবেগের উপাংশ হয়, তাহলে আমরা জানি যে গতিশক্তি হল,

$$T = \tfrac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \tfrac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

যেখানে I_1, I_2 এবং I_3 জড়ত্বের প্রধান মোমেন্ট এবং লাট্টুর প্রতিসাম্যের জন্য $I_1 = I_2$ নেয়া হয়েছে কেননা Oz অক্ষ লাট্টুর প্রতিসাম্য অক্ষ। অয়লার

কোণে প্রকাশ করে লেখা যায়,

$$\omega_1 = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$$
$$\omega_2 = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$$
$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta$$

কেননা $\dot{\theta}$ পাদরেখা ON এর চারদিকে কৌণিক গতিবেগ, $\dot{\psi}$ প্রতিসাম্য অক্ষ Oz এর চারদিকে গতিবেগ এবং $\dot{\varphi}$ মহাকাশে স্থির OZ অক্ষের চারদিকে গতিবেগ। সুতরাং

$$T = \tfrac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2$$

অয়লার কোণ θ, φ এবং ψ এর অনুষঙ্গী ভরবেগ হল,

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \dot{\theta}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi}\sin^2\theta + I_3 (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\cos\theta$$

$$p_\psi = I_3 (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})$$

এখন যেহেতু $\dot{\theta} = \cos\psi\,\omega_1 - \sin\psi\,\omega_2$ এবং

$$\dot{\varphi}\sin\theta = \sin\psi\,\omega_1 + \cos\psi\,\omega_2$$

তাই লেখা যায়,

$$p_\theta = I_1 (\omega_1\cos\psi - \omega_2\sin\psi)$$

$$p_\varphi = I_1 (\omega_1\sin\psi + \omega_2\cos\psi)\sin\theta + I_3\omega_3\cos\theta$$

$$p_\psi = I_3\omega_3$$

এই সমীকরণ থেকে স্পষ্ট যে p_θ পাদরেখার দিকে কৌণিক ভরবেগ, p_ψ প্রতিসাম্য অক্ষের দিকে কৌণিক ভরবেগ এবং p_φ মহাকাশে স্থির OZ অক্ষের দিকে কৌণিক ভরবেগ। এই সমীকরণ থেকে ω_i নির্ধারণ করা যায়। সুতরাং যদি লাটিমের উপর কোন বল সক্রিয় না হয়, তাহলে হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক হবে

$$H = T = \frac{1}{2I_1}\left[p_\theta^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{\sin\theta}\right] + \frac{p_\psi^2}{2I_3}$$

যেহেতু এখানে ψ এবং φ পর্যায়বৃত্তিক তাই

$$p_\psi \quad \text{এবং} \quad p_\varphi \text{ ধ্রুবরাশি}$$

এখন OZ অক্ষ সামগ্রিক কৌণিক ভরবেগের দিকে নেয়া হয়েছে এবং এই সামগ্রিক কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণশীল। যেহেতু OZ অক্ষ পাদরেখা ON এর উপর লম্ব, তাই ON রেখার দিকে কৌণিক ভরবেগ শূন্য অর্থাৎ

$$P_\theta = 0$$

অতএব হ্যামিল্টনীয় গতিসমীকরণ থেকে

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{1}{I_1} p_\theta = 0$$

সুতরাং θ ধ্রুব। আবার যেহেতু $p_\theta = 0$,
তাই

$$\dot{p_\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

সুতরাং H অপেক্ষককে অন্তরকলন করে, আমরা পাই

$$(p_\varphi - p_\psi \cos\theta)\,(p_\psi - p_\varphi \cos\theta) = 0$$

যেহেতু p_φ এর মান p_ψ এর বড় বা সমান হতে পারে তাই

$$p_\psi - p_\varphi \cos\theta = 0$$

অর্থাৎ

$$\cos\theta = \frac{p_\psi}{p_\varphi}$$

সুতরাং

$$H = \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos\theta)^2}{2I_1 \sin^2\theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3}$$

$$= \frac{p_\varphi^2}{2I_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right) p_\psi^2$$

অতএব

$$\dot{\varphi} = \omega_\varphi = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{1}{I_1} p_\varphi$$

$$\dot{\psi} = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right) p_\psi$$

অর্থাৎ প্রতিসাম্য অক্ষের দিকে একটি সুষম ঘূর্ণন ($\dot{\psi}$) এবং কৌণিক ভরবেগের দিক OZ অক্ষের চারপাশে ঐ প্রতিসাম্য অক্ষের সুষম ঘূর্ণন ($\dot{\varphi}$) পাওয়া যায়।

এখন মাধ্যাকর্ষণজনিত বিভবশক্তি

$$V = mgh \cos\theta$$

প্রবর্তন করে আমরা লিখতে পারি,

$$H = \frac{1}{2I_1}\left[p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(p_\varphi - p_\psi \cos\theta\right)^2\right] + \frac{1}{2I_3} p_\psi^2 + mgh\cos\theta = E$$

এখানে h হল O বিন্দু থেকে লাটিমের ভরকেন্দ্রের দূরত্ব এবং E তার সামগ্রিক শক্তি।

যেহেতু φ এবং ψ পর্যায়বৃত্তিক অক্ষাংশ, তাই

$$p_\varphi = \text{ধ্রুবরাশি} = a_2 \qquad p_\psi = \text{ধ্রুবরাশি} = a_3$$

এখন হ্যামিল্টন-জেকোবী পদ্ধতি প্রয়োগ করার জন্য আমরা লিখতে পারি,

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta}$$

যেখানে S হ্যামিল্টনের প্রধান অপেক্ষক। সুতরাং ১০.১১ সমীকরণ থেকে

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2I_1}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{(a_2 - a_3\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\right] + \frac{a_3^2}{2I_3} + mgh\cos\theta = 0$$

এখন লেখা যায়,

$$S = W - Et$$

সুতরাং W-অপেক্ষকের সমীকরণ হল

$$\frac{1}{2I_1}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{(a_2 - a_3\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\right] + \frac{a_3^2}{2I_3} + mgh\cos\theta = E$$

সমাধান করে,

$$W = \int d\theta \times$$

$$\sqrt{2I_1E - \frac{1}{\sin^2\theta}(a_2 - a_3\cos\theta)^2 - a_3^2 I_1/I_3 - 2I_1\, mgh\cos\theta}$$

সুতরাং (১০.১৭) সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$t - \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial E} =$$

$$I_1 \int \frac{d\theta}{\sqrt{2I_1E - (a_2 - a_3\cos\theta)^2/\sin^2\theta - a_3^2 I_1/I_3 - 2I_1 mgh\cos\theta}}$$

$$= -\int \frac{dx}{\sqrt{F(x)}}$$

যেখানে $x = \cos\theta$ এবং

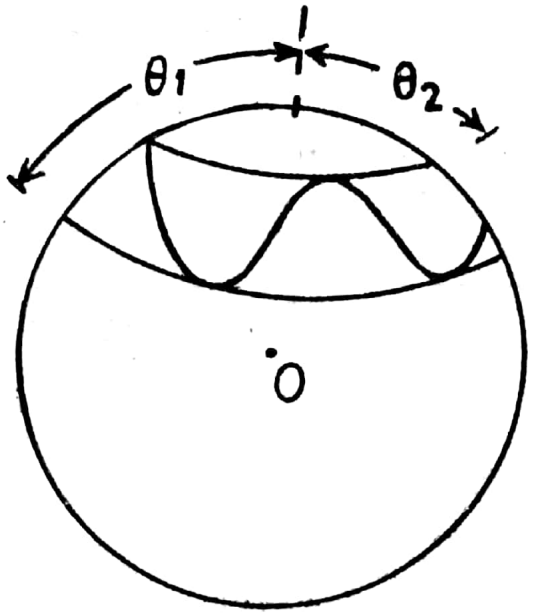
$$F(x) = \frac{1}{I_1^2}\left[(1-x^2)(2I_1E - I_1 a_3^2/I_3 - 2I_1 mgh\, x) - (a_2 - a_3 x)^2\right]$$

এটি একটি ত্রিঘাত সমীকরণ এবং তাই উপরের সমাকলন উপবৃত্তাকার (elliptic) সমাকলনের মাধ্যমে করা যায়। ফলে x বা $\cos\theta$ সময়ের পর্যায়বৃত্ত অপেক্ষকে পাওয়া যায়। সুতরাং সমাকলনের মান F অপেক্ষকের দুটি শূন্যের মধ্যে থাকে কেননা তার মধ্যে F ধনাত্মক। এখন

$$F(1) = -(a_2 - a_3)^2/I_1 \qquad F(-1) = -(a_2 + a_3)^2/I_1$$

সুতরাং এ দুটি রাশিই ঋণাত্মক। অতএব গতি সম্ভব হবে তখনই যখন x এর বিস্তার $(-1, +1)$ হয় অর্থাৎ θ কোণের বিস্তার π এবং 0 এর মধ্যে F ঋণাত্মক যদি না হয়। অর্থাৎ F অপেক্ষকের দুটি শূন্য বিন্দু আছে x_1 এবং x_2 (বা θ_1 এবং

θ_2 হল θ-এর প্রান্তিক মান)। এর তাৎপর্য এই যে লাটিমের অক্ষের শীর্ষবিন্দু দুটি সমান্তরাল বৃত্তের মধ্যে স্পন্দিত হয় (চিত্র ১০.২)।



চিত্র ঃ ১০.২

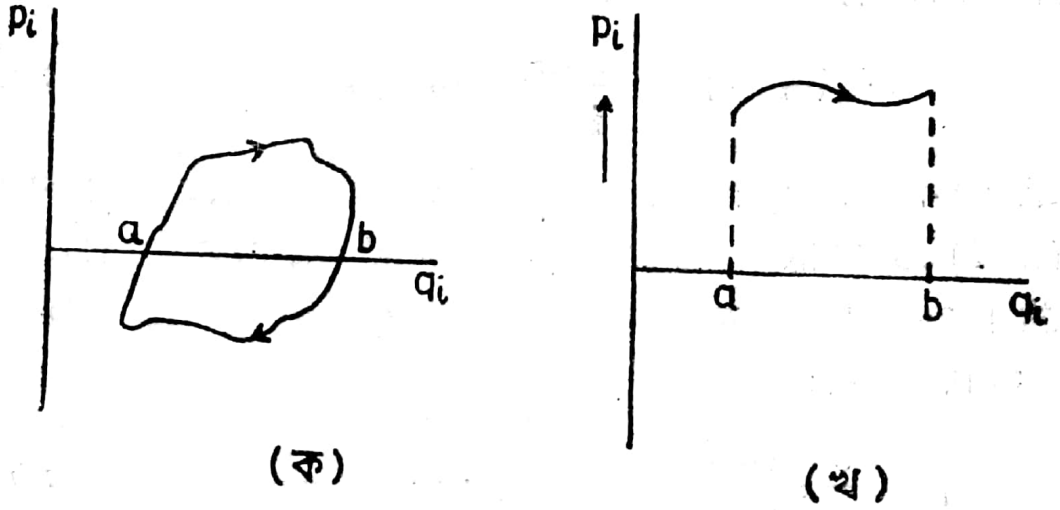
১০·৩ কার্য এবং কোণ পরিবর্তী রাশি

গতিবিজ্ঞানে যে সব বস্তুনিচয়ের পর্যায়বৃত্তের বৈশিষ্ট্য আছে তাদের গুরুত্ব অপরিসীম। পর্যায়বৃত্ত গতি দু'ধরনের : স্পন্দন (oscillation অথবা libration) এবং ঘূর্ণন (rotation)। গতি যখন দুটি প্রান্তিক সীমার মধ্যে আবদ্ধ থাকে তখন তাকে স্পন্দন বা দোলন বলা যায়। অন্যদিকে দশাস্থানে গতিপথ যদি এরকম হয় যে q এর সাপেক্ষে p পর্যায়বৃত্তে পরিবর্তিত হয় তবে তাকে ঘূর্ণন বলে।

পর্যায়বৃত্ত সমাধানের যে সব সমস্যা আলোচনা করা হয় তাদের প্রধান বিচার্য বিষয় হল গতির স্পন্দনসংখ্যা। হ্যামিলটন-জেকোবী পদ্ধতি এ ধরনের সমস্যা সমাধানে অত্যন্ত উপযোগী। পর্যায়বৃত্ত বস্তুনিচয়ের স্পন্দনসংখ্যা নির্ধারণের পদ্ধতিকে 'ডিলাউনির পদ্ধতি' বলে।

একটি বস্তুনিচয় নেয়া যাক যার গতিশীল অবস্থা বর্ণনা করার জন্য স্থানাঙ্ক অবস্থান এবং ভরবেগ অক্ষাংশ (q, p) প্রবর্তন করা যায় ($q = q_1, \ldots, q_n$ এবং $p = p_1, \ldots p_n$)। বস্তুনিচয় যখন গতিশীল তখন দশাস্থানে বা q-p স্থানে একটি কক্ষপথের সৃষ্টি হয়। শুধু তাই নয়, প্রতিটি স্বাধীনতার-মাত্রার নিজস্ব দশাস্থানে অর্থাৎ (q_i, p_i) স্থানেও একটি কক্ষপথ বর্ণিত হয়। সমগ্র (q, p) দশা-স্থানের অংশ $q_i - p_i$ তলে ব্যাপক কক্ষপথের অভিক্ষেপই হল (q_i, p_i) দশাস্থানের

কক্ষপথ এবং $p_i = p_i(q_j)$ এ ধরনের সমীকরণ দিয়ে ঐ কক্ষপথ নির্দেশ করা যায়। অবশ্য $q_i - p_i$ তলে কক্ষপথের সমীকরণ $p_i = p_i(q_j)$ একটি আবদ্ধ বক্ররেখা হতে পারে। কেননা q_i দুটি সুনির্দিষ্ট প্রান্তিক মান $q_i = a$ এবং $q_i = b$ এর মধ্যে স্পন্দিত হয় (চিত্র ১০.৩ ক)। এটাকেই স্পন্দন বলে। আবার এমনও হতে পারে যে q_i রাশি $q_j = a$ বিন্দু থেকে $q_i = b$ বিন্দুতে যায় এবং তার পরে পুনরায় $q_i = a$ বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করে (চিত্র ১০.৩ খ)। এটাকেই বলে ঘূর্ণন।



চিত্র : ১০.৩

উভয়ক্ষেত্রেই প্রতিটি $q_i - p_i$ দশাস্থানে বস্তুনিচয় একটি পর্যায়বৃত্তের মধ্য দিয়ে যায়। অবশ্য $q-p$ দশাস্থনে বস্তুনিচয় তার প্রাথমিক অবস্থায় কখনও ফিরে আসে না। ধরা যাক আমরা একটি n সংখ্যক স্বাধীনতার-মাত্রা সম্পন্ন, বিশ্লিষ্টকরণযোগ্য, পর্যায়বৃত্তের বস্তুনিচয় নিয়ে আলোচনা করছি। তার হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক হল $H(q, p)$। হ্যামিল্টনের বিশেষ অপেক্ষক W এর জন্য সময়-নিরপেক্ষ হ্যামিল্টন-জেকোবী সমীকরণ হল,

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E \qquad (১০.৩২)$$

যার সমাধান লেখা যায়,

$$W(q, \alpha) = \sum_i W_i(q_i, \alpha) \qquad (১০.৩৩)$$

যেখানে $\alpha = \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ ধ্রুব সংখ্যা।

এখন নিচের রৈখিক সমাকলন

$$J_i(\alpha) = \oint \frac{\partial W_i}{\partial q_i} dq_i \qquad (১০.৩৪)$$

দিয়ে আমরা n ধ্রুবরাশি $J = (J_1, ---, J_n)$ এর সংজ্ঞা দিতে পারি। (১০.৩৪) সমীকরণে q_i পরিবর্তী রাশির একটি সম্পূর্ণ পর্যায়বৃত্তের উপর সমাকলন করা হয়েছে এবং তাই J_i রাশিগুলি α_i ধ্রুবকের অপেক্ষক। সুতরাং হ্যামিল্টন-জেকোবী তত্ত্বে এই J_i রাশিগুলিকে সমাকলন ধ্রুবরাশি হিসেবে ব্যবহার করা যায় এবং বিশেষ অপেক্ষক W কে এখন লেখা যায়,

$$W(q, \alpha) = \sum_i W_i(q_i, J_i) \qquad (১০.৩৫)$$

এখন এই অপেক্ষককে পুরাতন (q, p) পরিবর্তী রাশি থেকে নতুন পরিবর্তী রাশি (ω, J) তে রূপান্তর করার জন্য সৃজনকারী অপেক্ষক হিসেবে ব্যবহার করা যায়। অর্থাৎ আমরা নতুন পরিবর্তী রাশি ω_i এবং J_i সংজ্ঞা দেই নিচের রূপান্তর সমীকরণ দিয়ে,

$$\omega_i = \frac{\partial W(q, J)}{\partial J_i} \qquad p_i = \frac{\partial W(q, J)}{\partial q_i} \qquad (১০.৩৬)$$

এই নতুন অক্ষাংশ ω_i কে কোণ পরিবর্তী রাশি এবং নতুন ভরবেগ J_i কে কার্য-পরিবর্তী রাশি (action-angle variables) বলে।

(১০.৩৬) সমীকরণ থেকে,

$$p_i(q_i, \alpha) = \frac{\partial W_i(q_1, J(\alpha))}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i(q_i, \alpha)}{\partial q_i}$$

এবং (১০.৩৪) সমীকরণ থেকে,

$$J_i(\alpha) = \oint p_i dq_i \qquad (১০.৩৭)$$

(১০.৩৭) সমীকরণের ডান দিকের সমাকলন হল আসলে কক্ষপথের ভিতরে (চিত্র ১০.৩ ক) অথবা কক্ষপথের নিচে (চিত্র ১০.৩ খ) আবদ্ধ ক্ষেত্রফল। সুতরাং $J_i(\alpha)$ হল একটি সম্পূর্ণ পর্যায়বৃত্তে $q_i - p_i$ দশাস্থানে যে ক্ষেত্রফল সৃষ্টি হয় তার মান। এই মান নির্ভর করে α ধ্রুবকের উপরে অর্থাৎ প্রাথমিক অবস্থার উপরে। এর একক স্পষ্টতই কৌণিক ভরবেগের একক কেননা

(১০.৩৭) সমাকলনে p এবং q রাশি গুণ করা হয়েছে যা কৌণিক ভরবেগে করা হয়।

এখানে উল্লেখ করা যায় যে চিরায়ত গতিবিজ্ঞান থেকে কোয়ান্টাম গতি-বিজ্ঞানে যেতে হলে আমরা ধরে নেই যে J_i সমাকলনের মান $h/2\pi$ ধ্রুবরাশির পূর্ণসংখ্যক গুণিতক হবে, যেখানে h প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবক।

যেহেতু হ্যামিল্টন অপেক্ষক সময়-নিরপেক্ষ, এটি একটি গতিধ্রুবক এবং সামগ্রিক সময়ের একই। আবার J_i রাশিগুলিও ধ্রুবক এবং ফলে তার অনুষঙ্গী পরিবর্তী রাশি ω_i হল পর্যায়বৃত্তের।

সুতরাং

$$H(q_i, p_i) = K(J_i) = E \qquad (১০.৩৮)$$

যেখানে K হল নতুন হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক। যেহেতু কার্য পরিবর্তী রাশি এবং কোণ পরিবর্তী রাশি (J, ω) তে রূপান্তর সময়-নিরপেক্ষ, তাই পুরাতন হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক H নতুন অপেক্ষকের সমান।

নতুন আইনানুগ গতিসমীকরণ হল,

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial K(J_i)}{\partial \omega_i} = 0 \qquad (১০.৩৯)$$

এবং

$$\dot{\omega}_i = \frac{\partial K}{\partial J_i} = \nu_i$$

যেখানে ν_i ধ্রুবক কেননা K এবং J_i উভয়ই সময়ের সাপেক্ষে ধ্রুবক। সমা-কলন করে,

$$J_i = \gamma_i \qquad (১০.৪০)$$

এবং

$$\omega_i = \nu_i t + \delta_i$$

(১০.৩৬) সমীকরণ থেকে

$$\omega_j = \frac{\partial W}{\partial J_i}$$

এবং তার পরিবর্তন হল

$$d\omega_j = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial W(q, J)}{\partial J_j}\right) dq_k$$

$$= \frac{\partial}{\partial J_j}\left[\sum_k \frac{\partial W}{\partial q_k} dq_k\right]$$

কেননা $J_i = \gamma_i$ ধ্রুবক। এখন শুধু q_i ছাড়া অন্য সব q_k কে স্থির রেখে লেখা যায়,

$$d\omega_j = \frac{\partial}{\partial J_j}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right) dq_i$$

এবং তারপর q_i পরিবর্তী রাশির একটি সম্পূর্ণ পর্যায়বৃত্তের উপর সমাকলন করে আমরা পাই,

$$\Delta\omega_j = \frac{\partial}{\partial J_j}\oint \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i = \frac{\partial}{\partial J_j} J_i = \delta_{ij}$$

সুতরাং q_i ছাড়া অন্য সব q_k কে স্থির রেখে এবং শুধু q_i একটি পর্যায়বৃত্তে ঘুরে এলে, $\Delta\omega_i = 1$ এবং অন্য সবগুলির জন্য $\Delta\omega_i = 0$। এর তাৎপর্য এই যে q_i এক পর্যায়বৃত্ত অতিক্রম করলে তার অনুষঙ্গী ω_i কোণের পরিবর্তন হয় 1 এবং অন্যান্য ω গুলির কোন পরিবর্তন হয় না। যদি q_i পরিবর্তী রাশির পর্যায়কাল T_i লেখা যায় তাহলে (১০.৪০) সমীকরণ থেকে

$$\Delta\omega_i = \nu_i T = 1$$

সুতরাং ν_i হল q_i পরিবর্তী রাশির স্পন্দনসংখ্যা।

সুতরাং স্পন্দনগতির জন্যে q_i পরিবর্তী রাশিকে ω_i কৌণিক রাশির পর্যায়বৃত্ত অপেক্ষক হিসেবে লেখা যায়,

$$q_k = \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_{k,r}\, e^{2\pi i r \omega_k}$$

যেখানে

$$\omega_k = \nu_k t + \delta_k$$

এবং r একটি পূর্ণসংখ্যা। এটাকেই বলে ফুরিয়ার সিরিজ। সহগ $C_{k,r}$ গুলি ফুরিয়ার সিরিজের তত্ত্ব থেকে নির্ধারণ করা যায়।

উদাহরণ

একটি সরল সুষম স্পন্দকের হ্যামিলটনীয় অপেক্ষক হল,

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

তার স্পন্দনসংখ্যা নির্ধারণের জন্যে কার্য-কোণ পরিবর্তী রাশি ব্যবহার করা যায়। যেহেতু H একটি গতিধ্রুবক,

$$\frac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2}m\omega^2 q^2 = E$$

এটি উপবৃত্তের সমীকরণ যার অর্ধ-অক্ষদ্বয় হল $\sqrt{2mE}$ এবং $\sqrt{2E/m\omega^2}$। সুতরাং উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল হল,

$$J = 2\pi E/\omega$$

এবং নতুন হ্যামিলটনীয় অপেক্ষক হল

$$K = H(J) = E = \frac{\omega J}{2\pi}$$

সুতরাং

$$\nu = \frac{\partial K}{\partial J} = \frac{\omega}{2\pi}$$

১০·১৩ কার্য-কোণ পরিবর্তী রাশির মাধ্যমে গ্রহগতি

মহাকাশে গ্রহগতি আলোচনার জন্যে কার্য-কোণ পরিবর্তী রাশির ব্যবহার অত্যন্ত উপযোগী। গ্রহের কক্ষপথ একটি দ্বিমাত্রিক তলে অবস্থিত এই তথ্য প্রথম থেকেই ব্যবহার করার কোন প্রয়োজন হয় না। আমরা জানি যে বর্তুলাকার মেরুবর্তী স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় হ্যামিলটনীয় অপেক্ষক হল,

$$H = \frac{1}{2\mu}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\, p_\varphi^2\right) + V(r) \quad (১০.৪১)$$

যেখানে V(r) হল বিভবশক্তি। সুতরাং (১০.১৬) সমীকরণ থেকে প্রধান অপেক্ষক S এর জন্য হ্যামিলটন-জেকোবী সমীকরণ হল,

$$\frac{1}{2\mu}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right]+V(r)+\frac{\partial S}{\partial t}=0$$

যেহেতু আমরা আবদ্ধ অবস্থার সমস্যা আলোচনা করছি (সূর্যের চারদিকে পরিক্রমণশীল গ্রহ) তাই সামগ্রিক শক্তি ঋণাত্মক ($E<0$)। সেক্ষেত্রে প্রতিটি অক্ষাংশে গতি পর্যায়বৃত্তিক অর্থাৎ r এবং θ অক্ষাংশে স্পন্দন এবং φ অক্ষাংশে ঘূর্ণন গতি। সুতরাং কার্য-কোণ পরিবর্তী রাশি প্রয়োগ করার শর্ত সার্থক হয়। এখন যদি

$$S = W(r,\theta,\varphi) - \alpha_1 E$$

বসান যায় তাহলে বিশেষ অপেক্ষক W-এর জন্য পাওয়া যায়,

$$\frac{1}{2\mu}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right]+V(r)=\alpha_1=E \qquad (১০.৪২)$$

যেখানে α_1 ধ্রুবরাশিটিকে সামগ্রিক শক্তি E লেখা হয়েছে।

এখন পরিবর্তী রাশি বিশ্লিষ্টকরণ প্রক্রিয়া আরোপ করা যায় কেননা

$$W = W_1(r) + W_2(\theta) + W_3(\varphi)$$

লিখে আমরা প্রথম পর্যায়ে দুটি সমীকরণ পাই,

$$\frac{dW_3}{d\varphi} = \text{ধ্রুবরাশি} = \alpha_3$$

এবং

$$\frac{1}{2\mu}\left[\left(\frac{dW_1}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left\{\left(\frac{dW_2}{d\theta}\right)^2+\frac{\alpha_3{}^2}{\sin^2\theta}\right\}\right]+V(r)=E \qquad (১০.৪৩)$$

এর পরে আবার বিশ্লিষ্ট করে লেখা যায়,

$$\left(\frac{dW_2}{d\theta}\right)^2+\frac{\alpha_3{}^2}{\sin^2\theta} = \text{ধ্রুবরাশি} = \alpha_2{}^2 \qquad (১০.৪৪)$$

এবং

$$\left(\frac{dW_1}{dr}\right)^2+\frac{\alpha_2{}^2}{r^2} = 2\mu\,[E-V(r)] \qquad (১০.৪৫)$$

এখন আমরা (১০.৪৩), (১০.৪৪) এবং (১০.৪৫) সমীকরণ থেকে কার্য পরিবর্তী রাশির সংজ্ঞা দিতে পারি,

$$J_\varphi = \oint \frac{\partial W}{\partial \varphi}\, d\varphi = \oint \alpha_3\, d\varphi = W_3 \qquad (১০.৪৬)$$

$$J_\theta = \oint \frac{\partial W}{\partial \theta}\, d\theta = \oint \sqrt{\alpha_2{}^2 - \frac{\alpha_3{}^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta = W_2 \qquad (১০.৪৭)$$

এবং

$$J_r = \oint \frac{\partial W}{\partial r}\, dr = \oint \sqrt{2\mu(E-V) - \frac{\alpha_2{}^2}{r^2}}\, dr = W_1 \qquad (১০.৪৮)$$

যেহেতু একটি সম্পূর্ণ ঘূর্ণনে φ-এর মান 0 থেকে 2π হয়, তাই

$$J_\varphi = \int_0^{2\pi} \alpha_3\, d\varphi = 2\pi\alpha_3 \qquad (১০.৪৯)$$

এখন লক্ষ্য করা দরকার যে θ কোণের অনুষঙ্গী ভরবেগ

$$p_\theta = \frac{\partial W}{\partial \theta} = \sqrt{\alpha_2{}^2 - \frac{\alpha_3{}^2}{\sin^2\theta}}$$

বাস্তব। সুতরাং

$$\alpha_2 > \alpha_3 \operatorname{cosec}\theta$$

অর্থাৎ

$$|\sin\theta| \geq \frac{\alpha_3}{\alpha_2}$$

(১০.৪৭) সমীকরণ লেখা যায়,

$$J_\theta = \alpha_2 \oint \sqrt{1-\cos^2 i \operatorname{cosec}^2\theta}\, d\theta \qquad (১০.৫০)$$

যেখানে

$$\cos i = \alpha_3/\alpha_2$$

সম্পূর্ণ রৈখিক সমাকলনের পথ θ কোণের প্রান্তিক মান $-\theta_0$ থেকে $+\theta_0$ যায় এবং আবার $-\theta_0$ তে ফিরে আসে, যেখানে

$$\sin\theta_0 = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}$$

সুতরাং

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - i$$

অতএব J_θ সমাকলন হল 0 থেকে θ_0 সমাকলনের চারগুণ,

$$J_\theta = 4\alpha_2 \int_0^{\theta_0} \operatorname{cosec}\theta \sqrt{\sin^2 i - \cos^2\theta}\, d\theta$$

এখন আমরা

$$\cos\theta = \sin i \sin\psi$$

বসিয়ে পাই

$$J_\theta = 4\alpha_2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 i \cos^2\psi}{1-\sin^2 i \sin^2\psi}\, d\psi$$

কেননা পর্যায়বৃত্তিক গতির জন্য বর্গমূলের চিহ্ন বাদ দেয়া যায়। আবার

$$u = \tan\psi$$

বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$J_\theta = 4\alpha_2 \sin^2 i \int_0^{\pi/2} \frac{du}{(1+u^2)(1+u^2\cos^2 i)}$$

$$= 4\alpha^2 \int_0^{\pi/2} du \left[\frac{1}{1+u^2} - \frac{\cos^2 i}{1+u^2\cos^2 i}\right]$$

$$= 4\alpha_2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos i\right)$$

$$= 2\pi\,(\alpha_2 - \alpha_3) \qquad (১০.৫১)$$

সবশেষে আমাদের নিচের সমাকলন

$$J_r = \oint \sqrt{2\mu[E - V(r)] - \alpha_2^2/r^2}\; dr \qquad (১০.৫২)$$

করা প্রয়োজন। নিউটনের মাধ্যাকর্ষণ আইন থেকে আমরা জানি,

$$V(r) = -\,G_N\,\frac{Mm}{r}$$

যেখানে G_N নিউটনের অভিকর্ষ ধ্রুবক।

সুতরাং গ্রহগতির জন্য আমরা লিখতে পারি,

$$J_r = \oint \sqrt{A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}}\; dr \qquad (১০.৫৩)$$

যেখানে

$$A = -\,2\mu|E|$$

$$B = 2\mu\,G_N\,Mm = \mu k$$

$$C = \alpha_2^2$$

(১০.৫৩) সমীকরণের মান কসির 'রেসিডিউ বা অবশিষ্টাংশ পদ্ধতিতে' নির্ণয় করা যায়।

আমরা লিখতে পারি,

$$J_r = 2\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{Ar^2 + 2Br - C}\;\frac{dr}{r}$$

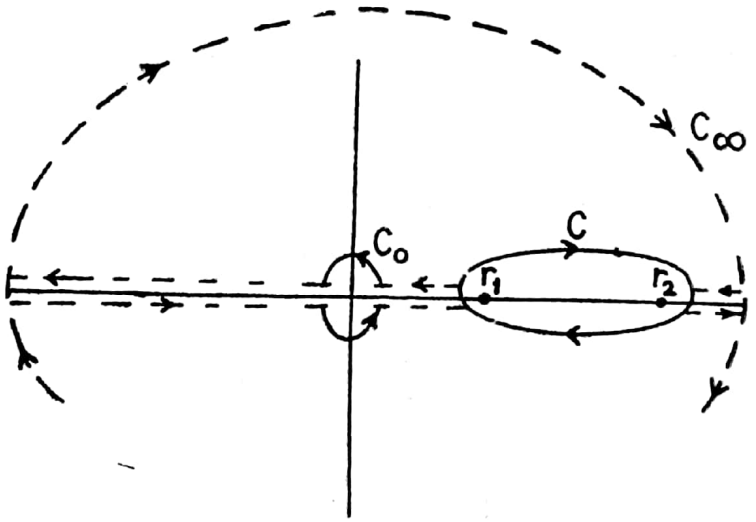
যেখানে r_1 এবং r_2 নিচের দ্বিঘাত সমীকরণের মূল

$$Ar^2 + 2Br - C = 0$$

অর্থাৎ

$$r_{1,2} = (-B \pm \sqrt{B^2 + AC})/A$$

যেহেতু A ঋণাত্মক তাই উভয় মূলই ধনাত্মক। লক্ষ্য করা দরকার যে (১০.৫২) সমীকরণে সমাকলনের রাশি আসলে p_r যা অবশ্যই ধনাত্মক। এখন একটি সম্পূর্ণ পর্যায়বৃত্তে, r_1 থেকে r_2 তে গিয়ে আবার r_1 এ ফিরে আসা হয় এবং তাই r_1 থেকে r_2 তে যাওয়ার সময়ে বর্গমূলের চিহ্ন ধনাত্মক নিতে হবে এবং r_2 থেকে r_1 এ ফিরে আসার সময়ে বর্গমূলের চিহ্ন ঋণাত্মক নিতে হবে (কেননা তখন $dr < 0$)। সুতরাং সমাকলন আসলে একটি দ্বৈত-মানের অপেক্ষকের উভয় শাখার উপর সমাকলন এবং r_1 ও r_2 এই অপেক্ষকের শাখাবিন্দু (branch points)। আমরা জটিল r-তলে r_1 থেকে r_2 পর্যন্ত একটি ব্যবচ্ছেদ (cut) নিতে পারি (চিত্র ১০.৪)।



চিত্র : ১০.৪

আমরা সমাকলনের পথ C এর জায়গায় C_0 এবং C_∞ এই দুটি পথ নিতে পারি। মূলবিন্দুর কাছে $(r = 0)$, বর্গমূলের চিহ্ন ঋণাত্মক নেয়া প্রয়োজন কেননা এখানে আমরা r_1 এর নিচের অঞ্চলে রয়েছি। সুতরাং $r = 0$ বিন্দুর কাছে J_r সমাকলনের আচরণ হল

$$J_r = -\int \sqrt{2Br - C}\ \frac{dr}{r}$$

$$= -\sqrt{-C}\int \left(1 - \frac{B}{C}r\right)\frac{dr}{r}$$

সুতরাং মূলবিন্দুর মেরুতে অবশিষ্ট (অর্থাৎ $\frac{1}{r}$ এর সহগ) হল $-\sqrt{-C}$ এবং কসির উপপাদ্য থেকে সমাকলনের মান হল,

$$J_r = -2\pi i\left(-\sqrt{-C}\right) = 2\pi i\sqrt{-C}$$

আবার r এর অসীম মানের জন্যে সমাকলনের মান নির্ণয় করা যায় $r = 1/u$ বসিয়ে। এক্ষেত্রে r_2 বিন্দুর উপরে বর্গমূলের চিহ্ন ধনাত্মক এবং তাই,

$$J_r = -\int \frac{du}{u^2}\sqrt{A + 2Bu - Cu^2}$$

সুতরাং যখন $r \to \infty$ অর্থাৎ $u \to 0$ তখন

$$J_r \to -\int \frac{du}{u^2}\sqrt{A}\left(1 + \frac{B}{A}u\right)$$

এবং $u = 0$ বিন্দুর মেরুতে অবশিষ্ট হল $-B/\sqrt{A}$। অতএব কসির উপপাদ্য থেকে,

$$J_r = -2\pi i\left(-\frac{B}{\sqrt{A}}\right)$$

সুতরাং সামগ্রিকভাবে

$$J_r = 2\pi i\left(\sqrt{-C} + \frac{B}{\sqrt{A}}\right)$$

$$= -2\pi\alpha_2 + \frac{2\pi\mu k}{\sqrt{-2\mu|E|}} \qquad (১০.৫৪)$$

অতএব

$$J = J_r + J_\theta + J_\varphi = -2\pi\alpha_2 + \frac{2\pi G_N}{(M+m)\sqrt{-2\mu|E|}} + 2\pi(\alpha_2 - \alpha_3) + 2\pi\alpha_3$$

$$= \frac{2\pi\mu k}{\sqrt{-2\mu|E|}}$$

সুতরাং

$$E = -\frac{2\pi^2\mu k^2}{J^2} \qquad (১০.৫৫)$$

অর্থাৎ সামগ্রিক শক্তি শুধু J ধ্রুবকের উপরেই নির্ভর করে, আলাদাভাবে J_r, J_θ এবং J_φ এর উপরে নয়। এর অর্থ হল এই যে গ্রহগতি সম্পূর্ণ অধঃপতিত (degenerate) কেননা J_r, J_θ এবং J_φ মান বিভিন্ন হলেও তাদের যোগফল

এক থাকলেই শক্তিও একই থাকে। গ্রহগতির স্পন্দনসংখ্যাও একটি

$$\nu = \frac{\partial H}{\partial J_r} = \frac{\partial H}{\partial J_\theta} = \frac{\partial H}{\partial J_\varphi}$$

$$= \frac{4\pi^2 \mu k^2}{J^3}$$

সুতরাং গ্রহের পর্যায়কাল হল

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{J^3}{4\pi^2 \mu k^2}$$

কিন্তু উপবৃত্তাকার কক্ষপথের অর্ধপরাক্ষ a হল $(r_1 + r_2)/2$। সুতরাং

$$a = \frac{B}{A} = -\frac{k}{2E}$$

সুতরাং আমরা কেপলারের আইন ফিরে পাই,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \mu}{k} a^3$$

(১০.৪৬—১০.৪৮) সমাকলনগুলি সম্পন্ন করার অন্য আর একটি পদ্ধতি দেয়া যায়। (১০.৫৩) সমীকরণে আমরা যে দ্বিঘাত সমীকরণ পাই $Ar^2 + 2Br - C = 0$ তার মূল দুটি r_1 এবং r_2 এবং তাই $r_1 + r_2 = -2B/A$ ও $r_1 r_2 = -C/A$। সুতরাং

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2B}{C} = \frac{2\mu k}{\alpha_2^2}$$

এখন যদি আমরা লিখি

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\cos\psi = c + d\cos\xi$$

তাহলে

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = d(1 - \cos\xi)$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} = d(1 + \cos\xi)$$

সুতরাং

$$\sqrt{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)}=d\sin\xi$$

এবং

$$\frac{dr}{r^2}=d\sin\xi\,d\xi$$

এখন আমরা (১০.১৭) সমীকরণ ব্যবহার করতে পারি। সুতরাং (১০.৪৬), (১০.৪৭) এবং (১০.৪৮) সমীকরণ থেকে,

$$\beta_1=t-\frac{dW_1}{dE}=t-\mu\int\frac{dr}{\sqrt{2\mu E+2\mu k/r-\alpha_2^2/r^2}}$$

$$-\beta_2=\frac{dW_1}{d\alpha_2}+\frac{dW_2}{d\alpha_2}$$

$$=-\alpha_2\int\frac{dr}{r^2}\,\frac{1}{\sqrt{2\mu E+2\mu k/r-k_2^2/r^2}}$$

$$+\alpha_3\int\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2-\alpha_3^2\,\mathrm{cosec}^2\,\theta}}=I_1+I_2$$

এবং

$$-\beta_3=\frac{dW_2}{d\alpha_3}+\frac{dW_3}{d\alpha_3}=-\alpha_3\int\frac{\mathrm{cosec}^2\,\theta\,d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2-\alpha_3^2\,\mathrm{cosec}^2\,\theta}}+\varphi$$

$$=I_3+\varphi$$

এই I_3 সমাকলন সহজেই করা যায়,

$$I_3=+\int\frac{d(\cot\theta)}{\sqrt{(\alpha_2/\alpha_3)^2-1-\cot^2\theta}}$$

$$=+\sin^{-1}\left(\frac{\cot\theta}{\sqrt{(\alpha_2/\alpha_3)^2-1}}\right)$$

সুতরাং

$$\cot\theta=-\sqrt{(\alpha_2/\alpha_3)^2-1}\quad\sin(\beta_3+\varphi)$$

$$=-\tan i\sin(\varphi-\varphi_0)$$

কেননা $\cos i = \alpha_3/\alpha_2$ এবং $\beta_3 = -\varphi_0$ লেখা হয়েছে। এই সমীকরণ থেকে বোঝা যায় যে গ্রহের কক্ষপথ একটি তলে কেননা সদিক কোসাইনগুলির মধ্যে সম্পর্ক রৈখিক। বিয়োগ চিহ্ন দিয়ে শুধু নির্দেশ করা হয় যে θ হ্রাস পায় অর্থাৎ গ্রহ 'উপরে' উঠছে।

এর পরে আমরা I_1 সমাকলনটি নিয়ে লিখতে পারি,

$$I_1 = -\int \frac{dr}{r^2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)}}$$

$$= -\int d\xi = -\xi$$

সবশেষে

$$I_2 = +\int \frac{d\theta}{\sqrt{1-\cos^2 i \operatorname{cosec}^2\theta}}$$

এখানে $\cos i = \alpha_3/\alpha_2$ এবং $\cos\theta = \sin i \sin u$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$I_2 = +\int \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - \cos^2 i}} = -\int \frac{\sin i \cos u\, du}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 i \sin u}} = -u$$

সুতরাং

$$-\beta_2 = -\xi - u$$

এবং

$$\frac{1}{r} = c + d\cos\xi = c + d\cos(u-\beta_2)$$

$$= c[1 + e\cos(u-u_0)]$$

যেখানে আমরা $\beta_2 = +u_0$ লিখেছি এবং শঙ্কুর উৎকেন্দ্রিকতা e নিয়ে আসা হয়েছে নিম্নলিখিত ভাবে,

$$e = \frac{d}{c} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$$

যেহেতু উপবৃত্তের অর্ধপরাক্ষ হল $a = (r_1 + r_2)/2$,

$$r_2 - r_1 = 2ea$$

সুতরাং

$$r_1 = a(1-e) \qquad r_2 = a(1+e)$$
$$c = 1/a(1-e^2) = 1/p$$

যেখানে p হল অর্ধ ল্যাটাস রেক্টাম। অতএব উপবৃত্তের সমীকরণ পাওয়া যায়,

$$r = \frac{p}{1+e\cos(u-u_o)}$$

যেহেতু $r_1 r_2 = a^2(1-e^2)$,

$$c = \sqrt{1-r_1 r_2/a^2} = \sqrt{1+\alpha_2^2/2\mu E a^2}$$
$$= \sqrt{1+\frac{2El^2}{\mu k^2}}$$

যেখানে $\alpha_2 = l$ লেখা হয়েছে। এই সমীকরণ আগেই দেয়া হয়েছে।

সবশেষে $\beta_1 = t_o$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$t - t_o = \mu \int \frac{dr}{\sqrt{2\mu E + 2\mu k/r - l^2/r^2}}$$
$$= \frac{\mu}{\sqrt{-2\mu E}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}}$$

এখন আমরা যদি

$$r = r_1\cos^2\frac{\psi}{2} + r_2\sin^2\frac{\psi}{2}$$
$$= a(1-e\cos\psi)$$

বসাই তাহলে পাওয়া যায়,

$$t - t_o = \sqrt{\frac{\mu a}{k}} \int a(1-e\cos\psi)\,d\psi$$
$$= \sqrt{\frac{\mu a}{k}}\, a(\psi - e\sin\psi)$$

এভাবেই কেপলারের সমীকরণ

$$\psi - e\sin\psi = n(t-t_o)$$

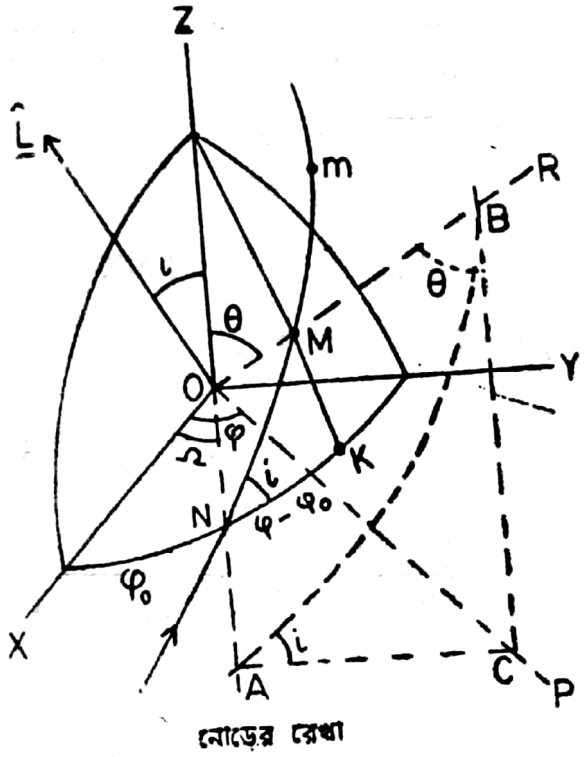
পাওয়া যায় যেখানে

$$n = \sqrt{\frac{k}{\mu a^3}}$$

রাশিকে বলে গড় গতি এবং পর্যায়কাল হল $2\pi/n$।

১০.৫ জ্যোতির্বিদ্যার রাশিসমূহ

জ্যোতির্বিদ্যার রাশিসমূহের (elements) সংজ্ঞা ১০.৫ চিত্রে দেয়া হয়েছে।



নোডের রেখা

চিত্র : ১০.৫

আমরা একটি যুগলবস্তু নেই যার মধ্যে অন্তর্ভুক্ত আছে সূর্য S এবং একটি গ্রহ যার ভর m। সূর্য আমাদের স্থানাঙ্কের মূলবিন্দুতে অবস্থিত। এ ধরনের স্থানাঙ্ককে সূর্য-কেন্দ্রিক প্রসঙ্গ-কাঠামো বলে। এই কাঠামোর যে তলে পৃথিবীর চারদিকে সূর্যের আপাতদৃষ্টির কক্ষপথ অবস্থিত তাকে ভূ-কক্ষ (ecliptic) তল বলে। ছবিতে XY তল ভূ-কক্ষ তল এবং এখানে X অক্ষ বসন্তকালীন বিষুবন (equinox) এর দিকে প্রসারিত। এই বিষুবন বিন্দুকে এরিস এর প্রথম বিন্দুও বলে। পৃথিবীর বিষুবীয় তলকে উত্তরায়নের সূর্যের পথ যে বিন্দুতে ছেদ করে সেটাই এই বিষুবন বিন্দু। যদিও বসন্ত বিষুবন বিন্দু এবং ভূ-কক্ষ তল খুব ধীরে ধীরে ঘূর্ণনশীল, তবু মোটামুটি তাদের মহাকাশে স্থির ধরা যায়।

পৃথিবীর কক্ষপথের তল একটি তীর দিয়ে দেখানো হয়েছে এবং এই তলের উপর লম্বের দিক $\hat{\underline{L}}$ একক সদিক রাশি নির্দেশ করছে অর্থাৎ $\hat{\underline{L}}$ হল কৌণিক ভরবেগের দিক।

এখন XY তল এবং কক্ষপথের তল যে রেখায় ছেদ করে তাকেই বলে পাতবিন্দুর (node) রেখা, ON। চিত্রের $\angle XON$ কোণকে Ω দিয়ে নির্দেশ করা হয় এবং এই কোণকে বলে ঊর্ধ্বমুখী পাতবিন্দুর দ্রাঘিমা (longitude of the ascending node) কেননা এখানে গ্রহ নিচের থেকে উপরে ওঠে (চিত্র ১০.৫)। যদি M বিন্দু কক্ষপথের অনুসূর বিন্দু হয় অর্থাৎ সূর্যের নিকটতম বিন্দু হয় তাহলে $\angle NOM$ কোণকে ω দিয়ে দেখানো হয় এবং তাকে অনুসূরের কোণ (argument of the perihelion) বলে। সবশেষে কক্ষতল ভূ-কক্ষের সঙ্গে i কোণ করে এবং তাকে কক্ষপথের আনতি (inclination of the orbit) বলে। সুতরাং $\hat{\underline{L}}$ সদিক রাশির OZ অক্ষের দিকে অভিক্ষেপ হল

$$\cos i = p_\varphi / p_\theta = \alpha_3/\alpha_2$$

জ্যোতির্বিদ্যার প্রচলিত রাশি হল i, Ω, a, e, ω এবং T যেখানে T হল অনুসূর (periepsis) বিন্দু দিয়ে যাওয়ার সময়। চিত্রে OR যে কোন সময়ে গ্রহের অবস্থান সদিক রাশি, $\angle XOP = \varphi$ যাকে দিগাংশ কোণ (azimuthal angle) বলে এবং OR এর XY তলে অভিক্ষেপ হল OP। এছাড়া $\angle ZOM = \theta$।

ধরা যাক ABC তল XY তল এবং ON রেখার উপর লম্ব এবং তা OR রেখাকে B বিন্দুতে একক দূরত্বে ছেদ করে অর্থাৎ OB = 1। সুতরাং

$$OB = 1 \qquad BC = OB\cos\theta = \cos\theta$$

$$\cot i = \frac{AC}{CB} = \frac{AC}{\cos\theta} \qquad OC = \sin\theta$$

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \frac{AC}{OC} = \frac{AC}{\sin\theta}$$

সুতরাং

$$AC = \cos\theta\cot i = \sin\theta\sin(\varphi - \varphi_0)$$

অতএব

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \cot\theta\cot i$$

যেখানে $\angle NOK = \varphi_0 = \Omega$। এই সমীকরণ আগেই পাওয়া গিয়েছে। আবার বর্তুল ত্রিভুজ NMK থেকে লেখা যায়,

$$\frac{\sin i}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin u}$$

সুতরাং

$$\cos\theta = \sin i \sin u$$

এই সমীকরণও পূর্বে ব্যবহার করা হয়েছে।

সুতরাং গ্রহগতির সমাকলনে t_0, u_0 এবং φ_0 এই তিনটি সমাকলন ধ্রুবকের তাৎপর্য এখন স্পষ্ট। স্পষ্টতই t_0 হল গ্রহ অনুসূর বিন্দুতে অবস্থান করার সময়, u_0 হল u রাশির অনুসূর (perihelion) বিন্দুতে মান এবং $\varphi_0 = \Omega$ হল উর্ধ্বমুখী পাতবিন্দুর দ্রাঘিমা।

১০.৬ হ্যামিল্টন-জেকোবী তত্ত্বের সঙ্গে কোয়ান্টাম তরঙ্গ গতিবিজ্ঞানের সম্পর্ক

আমরা জানি যে যখন হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক সময়ের উপর নির্ভরশীল নয় তখন প্রধান অপেক্ষক $S(q, \alpha, t)$ এর জন্য হ্যামিল্টন-জেকোবী সমীকরণ হল,

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

যেখানে ভরবেগ পরিবর্তী রাশি হল,

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}$$

এখন বিশেষ অপেক্ষক $W(q, \alpha)$ প্রবর্তন করে,

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - Et$$

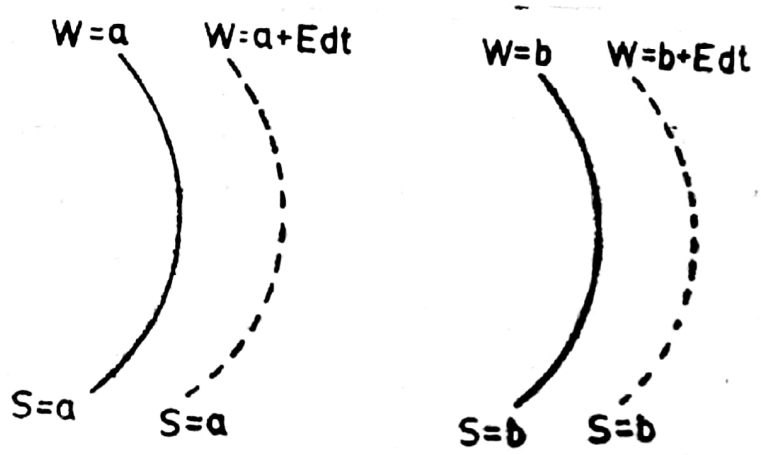
আমরা পাই

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E$$

যেখানে E বস্তুনিচয়ের সামগ্রিক শক্তি।

যেহেতু W সময়ের উপর নির্ভরশীল নয় তাই W = ধ্রুবরাশি এই পৃষ্ঠতল-গুলির q স্থানাঙ্কের জগতে সুনির্দিষ্ট অবস্থান রয়েছে। সুতরাং যে কোন সময়ে ধ্রুব S অপেক্ষকের পৃষ্ঠতল কোন একটি ধ্রুব W অপেক্ষকের পৃষ্ঠতলের সঙ্গে একই হয়ে যায়।

সুতরাং $t = 0$ সময়ে, $S = a$ এবং $S = b$ পৃষ্ঠতলদ্বয় $W = a$ এবং $W = b$ পৃষ্ঠতলদ্বয়ের সঙ্গে একই (চিত্র ১০.৬) কিন্তু dt পরবর্তী সময়ে, $S = a$ পৃষ্ঠতল $W = a + Edt$ পৃষ্ঠতলের সঙ্গে একই হয় এবং অনুরূপভাবে $S = b$ পৃষ্ঠতল $W = b + Edt$ পৃষ্ঠতলের সঙ্গে একই হয় কেননা তা না হলে $S = W - Et$ সমীকরণ বজায় থাকে না।



চিত্র : ১০.৬

সুতরাং কার্যত $S = a$ পৃষ্ঠতল dt সময়ে $W = a$ পৃষ্ঠতল থেকে $W = a + Edt$ পৃষ্ঠতলে সরে গিয়েছে। তরঙ্গতত্ত্বে তরঙ্গ-তল (wave-front) সরে যাওয়ার মত একই ব্যাপার এখানে ঘটছে যদিও মনে রাখা দরকার যে আমরা বস্তুকণার গতিবিজ্ঞান নিয়েই আলোচনা করছি, তরঙ্গ নিয়ে নয়।

এখন $S =$ ধ্রুবরাশি এই পৃষ্ঠতলের যে কোন বিন্দুতে 'তরঙ্গ' গতিবেগের দিক হবে ঐ বিন্দুতে লম্বের দিক এবং তার মান হবে

$$u = \frac{dS}{dt}$$

যেখানে dS হল লম্বের দিকে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য যা dt সময়ে অতিক্রম করা হয়েছে। যেহেতু $dW = E\,dt$ এবং সাধারণভাবে গ্রেডিয়েন্টের সংজ্ঞানুসারে,

$$dW = |\nabla W|\, dS$$

তাই আমরা লিখতে পারি

$$u = \frac{E}{|\underline{\nabla} W|}$$

কিন্তু হ্যামিল্টন-জেকোবী তত্ত্ব অনুসারে,

$$\underline{p} = \underline{\nabla} W$$

সুতরাং 'তরঙ্গ' গতিবেগের মান হল প্রত্যাশিত,

$$u = E / p$$

আবার $H(q, \partial W/\partial q) = E$ সমীকরণকে লেখা যায়

$$\frac{1}{2m}(\underline{\nabla} W)^2 + V = E$$

কেননা ভরবেগ $\underline{p} = \underline{\nabla} W$। সুতরাং W অপেক্ষকের গ্রেডিয়েন্টের দিক বস্তুকণার ভরবেগের দিক নির্দেশ করে। বস্তুকণা যখন W=ধ্রুবক পৃষ্ঠতলের লম্বের দিকে গতিশীল, তখন পৃষ্ঠতলগুলিও তরঙ্গ-তলের মত মহাকাশে গতিশীল। অর্থাৎ বস্তুকণার গতির সঙ্গে এক ধরনের তরঙ্গের গতিও জড়িত আছে বলা যায়।

যদি বাস্তবিকই বস্তুর এ ধরনের তরঙ্গ প্রকৃতি থাকে তবে তার জন্য একটি 'তরঙ্গ অপেক্ষক' ψ থাকবে যার তরঙ্গ-সমীকরণ লেখা যায়,

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \nabla^2\psi = 0$$

যেখানে v তরঙ্গের গতিবেগ। যে মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক $n = c/v$, সেখানে তরঙ্গ সমীকরণ হল (একমাত্রিক জগতে),

$$\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0$$

যার সমাধান লেখা যায়,

$$\psi = e^{A(z) + i[k_0 f(z) - \omega t]}$$

এখানে $k_0 = \omega/c$ অর্থাৎ শূন্যস্থানের তরঙ্গসংখ্যা কেননা শূন্য স্থানে তরঙ্গ-অপেক্ষক আমরা জানি,

$$\psi = \psi_0 e^{i(k_0 z - \omega t)}$$

এখন তরঙ্গ-সমীকরণে ψ এর মান বসিয়ে আমরা পাই,

$$\left(\frac{dA}{dz} + ik_0 \frac{df}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d^2A}{dz^2} + ik_0 \frac{d^2f}{dz^2}\right) + n^2 k_0^2 = 0$$

সুতরাং

$$\frac{d^2A}{dz^2} + \left(\frac{dA}{dz}\right)^2 + k_0^2\left(n^2 - \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right) = 0$$

এবং

$$\frac{d^2f}{dz^2} + 2\frac{dA}{dz}\frac{df}{dz} = 0$$

বিস্তার অপেক্ষক A কে ধ্রুব ধরে, আমরা পাই

$$n = \left|\frac{df}{dz}\right|$$

এই সমীকরণকে আলোক-বিজ্ঞানে আইকোনাল সমীকরণ বলে।

এখন তরঙ্গ-অপেক্ষকের সমীকরণ থেকে আমরা জানি যে ধ্রুব দশার সমীকরণ হল

$$k_0 f(z) - \omega t = \text{ধ্রুবরাশি}$$

এবং এই সমীকরণ আর $S =$ ধ্রুবরাশি এই দুই সমীকরণ একত্র করে দিয়ে আমরা লিখতে পারি,

$$S = a[k_0 f(z) - \omega t] = W - Et$$

সুতরাং

$$W = ak_0 f(z)$$

$$E = a\omega$$

যেখানে a ধ্রুবকটি প্রবর্তন করা হয়েছে মাত্রা সঠিক রাখার তাগিদে। স্পষ্টতই $E = a\omega$ সমীকরণ থেকে বোঝা যায় যে a রাশির মাত্রা হবে কার্য (action) এর মাত্রা (শক্তি $\times$ সময়)। আমরা লিখতে পারি

$$a = h / 2\pi$$

যেখানে h প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবক। সুতরাং

$$n = \left|\frac{df}{dz}\right| = \frac{1}{ak_0}\left|\frac{dW}{dz}\right| + \frac{2\pi c}{h\omega}\sqrt{2m(E-V)}$$

সুতরাং তরঙ্গ-সমীকরণ

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{n^2\omega^2}{c^2}\psi = 0$$

থেকে লেখা যায়,

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - V)\psi = 0$$

এটাই কোয়ান্টাম গতিবিজ্ঞানের বিখ্যাত শ্রডিঞ্জার একমাত্রিক সমীকরণ। অবশ্য শ্রডিঞ্জার সমীকরণের নির্ধারণ এখানে দেয়া হয়নি কেননা চিরায়ত বলবিজ্ঞান থেকে সরাসরি তা নির্ধারণ[১] করা যায় না। কোয়ান্টাম গতিবিজ্ঞান আর চিরায়ত গতিবিজ্ঞান পৃথক দুটি গতিবিজ্ঞান।

প্রশ্নমালা

১। কোন বস্তুকণার বিভবশক্তি হল

(ক) $V(q) = U\tan^2\alpha q$

(খ) $V(q) = U(e^{-2\alpha q} - 2e^{-\alpha q})$

(গ) $V(q) = -U\,\mathrm{sech}^2\alpha q$

(ঘ) $V(q) = U\left[\left(\frac{\alpha}{q}\right)^2 - 2\left(\frac{\alpha}{q}\right)\right]$

প্রতিটি ক্ষেত্রে ক্রিয়া (action) সমাকলন নির্ধারণ কর।

নিম্নলিখিত সমাকলন ব্যবহার করা যায়,

$$J_1 = \int_0^{q_1} dq\sqrt{E - U\tan^2\alpha q} \qquad \tan\alpha q_1 = \sqrt{E/U}$$

$$= \pi(\sqrt{E+U} - \sqrt{U})/2\alpha \qquad E > 0$$

$$J_2 = \int_{q_1}^{q_2} dq\sqrt{E - U(e^{-2\alpha q} - 2e^{-\alpha q})}$$

(১) দেখুন, Quantum Mechanics, A. M. Harun ar Rashid, University of Dhaka.

$$= \pi(\sqrt{U} - \sqrt{-E})/\alpha \qquad -U < E < 0$$

$$q_{1,2} = \frac{1}{\alpha} \ln\left[\frac{\sqrt{U}}{\sqrt{U} \mp \sqrt{E+U}}\right]$$

$$J_3 = \int_0^{q_1} dq \sqrt{U \operatorname{sech}^2 \alpha q + E} \qquad \cosh \alpha q_1 = \sqrt{-U/E}$$

$$= \pi(\sqrt{U} - \sqrt{-E})/2\alpha \qquad -U < E < 0$$

$$J_4 = \int_{q_1}^{q_2} dq \sqrt{E - U\left[\left(\frac{\alpha}{q}\right)^2 - 2\left(\frac{\alpha}{q}\right)\right]}$$

$$= \pi\alpha\sqrt{U}\,[\sqrt{-U/E} - 1] \qquad -U < E < 0$$

$$q_{1,2} = \frac{\alpha}{E}(\pm\sqrt{U^2 + EU} - U)$$

২। প্রমাণ কর $V(q) = U \tan^2 \alpha q$ বিভবের জন্য কৌণিক পরিবর্তী রাশি হল

$$\theta = \sin^{-1}\sqrt{\frac{E+U}{E}}\,\sin \alpha q$$

৩। সরল ছন্দিত দোলকের জন্য হ্যামিল্টন-জেকোবী সমীকরণ

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \tfrac{1}{2} kq^2 = 0$$

সমাধান কর।

৪। একটি বস্তুকণা উল্লম্বতলে ঊর্ধ্বে নিক্ষেপ কর। হ্যামিল্টন-জেকোবী পদ্ধতি প্রয়োগ করে গতিসমীকরণ একটি অধিবৃত্ত হয়, প্রমাণ কর।

৫। একটি একমাত্রার বস্তুনিচয়ের হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক হল

$$H = p^2 - q$$

হ্যামিল্টন-জেকোবী পদ্ধতিতে গতিসমীকরণ সমাধান কর।

৬। দেখাও যে সরল ছন্দিত স্পন্দকের যার হ্যামিল্টনীয় অপেক্ষক হল

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \tfrac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

তার হ্যামিল্টন-জেকোবী সমীকরণের সমাধান হল নিচের অপেক্ষক,

$$S = \frac{m\omega}{2}(q^2 + \alpha^2)\cot\omega t - m\omega q\alpha \operatorname{cosec}\omega t$$

প্রমাণ কর যে এই সৃজনকারী অপেক্ষক স্পন্দক গতির সঠিক সমাধান দেয়।

৭। নিচের বিভবের

$$V(r) = \tfrac{1}{2}\left(kr^2 + \frac{\alpha}{r^2}\right)$$

কার্য-কোণ পরিবর্তী রাশি নির্ধারণ কর।

৮। একটি বস্তু নিচের পর্যায়বৃত্ত বিভবের অধীনে গতিশীল

$$V(\psi) = \begin{cases} -U\psi/\pi & -\pi \leq \psi \leq 0 \\ U\psi/\pi & 0 \leq \psi \leq \pi \end{cases}$$

$$V(\psi) = V(\psi + 2\pi)$$

তার কার্য-কোণ পরিবর্তী রাশি নির্ধারণ কর।

৯। একটি বস্তুকণা একটি সুষম ক্ষেত্রের অধীনে সরলরেখায় গতিশীল। উদাহরণস্বরূপ চৌম্বকক্ষেত্রে চৌম্বক মেরুর গতির কথা চিন্তা করা যায়। হ্যামিল্টন-জেকোবী তত্ত্ব অনুসারে সময়ের অপেক্ষক হিসেবে অবস্থান রাশি প্রকাশ কর।

১০। কার্য-কোণ পরিবর্তী রাশির সঙ্গে জ্যোতির্বিদ্যার রাশিগুলির সম্পর্ক নির্ধারণ কর।

১১। প্রমাণ কর যে 'উৎকেন্দ্রিক বৈষম্য' ψ আসন্নমানে প্রকাশ করা যায় এভাবে

$$\psi = M + \left(e - \frac{e^3}{8}\right)\sin M + \frac{e^2}{2}\sin 2M + \frac{3}{8}e^3 \sin 3M$$

যেখানে M হল 'গড় বৈষম্য'।

১২। ফুরিয়ার সিরিজে $e \sin \psi\omega$ প্রসার করে (যেখানে ω হল উৎকেন্দ্রিক বৈষম্য) প্রমাণ কর যে কেপলার সমীকরণের সমাধান হল

$$\psi = nt + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{s} J_s(se)\sin(\pi ts)$$

