অধ্যাপক বিবেকানন্দ সাউ
দর্শন বিভাগ
বিদ্যানগর কলেজ

Topic : সম্ভাব্যতা (Probability)

সম্ভাব্যতা (Probability)

অবরোহী

আরোহী

সরল ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয়

জটিল ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয়

সরাসরি সারণী থেকে জটিল ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয়

সরল ও <u>স্বতন্ত্র ঘটনার সম্ভাব্যতা যুক্ত করে জটিল ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয়</u>

দু রকম ঘটনা সংযোগ

সংযৌগিক ঘটনা (ক এবং খ ঘটার সম্ভাব্যতা : গুণের সূত্র)

বৈকল্পিক ঘটনা

বৈকল্পিক ঘটনা

ক) ক অথবা খ ঘটার সম্ভাব্যতা : যোগের সূত্র (বিসংবাদী বিকল্প)
খ) অবিসংবাদী বৈকল্পিক ঘটনা (অন্তত একটি বা একবার ....) যোগের সূত্র প্রয়োগ

অস্বতন্ত্র ঘটনার সম্ভাব্যতা যুক্ত করে জটিল ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয়

ক) অস্বতন্ত্র ঘটনার সংযোগ (যদি - তাহলে ক এবং খ-এর সম্ভাব্যতা : গুণের সূত্রের প্রয়োগ)
খ) অস্বতন্ত্র ঘটনার সংযোগ দিয়ে গঠিত বৈকল্পিক ঘটনার সম্ভাব্যতা : গুণ ও যোগের যুক্ত প্রয়োগ

আরোহী

আরোহী সম্ভাব্যতা -পরিসংখ্যা তত্ত্ব

আরোহী সিদ্ধান্ত ও সম্ভাব্যতা

সম্ভাব্যতা আরোহ অনুমানের একটি বিশেষ বৈশিষ্ট্য। আরোহ অনুমানের সিদ্ধান্ত সর্বদাই সম্ভাব্য হয়। আরোহ অনুমান সম্পর্কে আমরা এর পূর্বে যে সকল আলোচনা করেছি, সেখানে বারে বারে সম্ভবত, সম্ভাব্য, সম্ভাব্যতা এ কথাগুলি বহুবার প্রয়োগ হতে দেখেছি। আমরা আরও জানি আরোহ যুক্তিমাত্রই সিদ্ধান্ত অবৈধ। তাই এর সিদ্ধান্ত কখনো সম্ভাব্যতার মাত্রা অতিক্রম করে যেতে পারে না। সম্ভাব্যতা বাক্যের ধর্ম। কখনো বস্তু বা ঘটনার ধর্ম হতে পারে না। এই অধ্যায়ে আমরা কোন বাক্য কম সম্ভাব্য, আবার কোন বাক্য বেশী সম্ভাব্য - কেবল এইটুকু আলোচনার মধ্যে সীমাবদ্ধ রাখব না। আমরা এখন সম্ভাব্যতার মাত্রা জানব এবং মাত্রা কিভাবে নির্ণয় করতে হয় তাও জানব।

ধরাযাক্ একটি (নিখুঁত) মুদ্রা টস করলে তার সোজা বা উল্টো দিক (Head or Tail) ওঠার সম্ভব্যতা কত ? আমরা জানি মুদ্রার দুটি দিক ঃ Head বা সোজা দিক এবং Tail বা উল্টো দিক। এখন একটি নিখুঁত মুদ্রা টস করলে Head(H) বা Tail(T) ওঠার সম্ভাব্যতা সমান সমান। কাজেই আমরা বলতে পারি সোজা ও উল্টো দিক ওঠার সম্ভাব্যতা ৫০ - ৫০, বা আধাআধি, বা ½ ।

তবে সব সময় এ রকম নির্দিষ্টভাবে কোন সংখ্যা বা ভগ্নাংশ দিয়ে যে সব সময় সম্ভাব্যতা ব্যক্ত করা যায় এমন কিন্তু নয়। যেমন ‘করোনা ভাইরাসে বিশ্ব মানব জাতি ধ্বংস হবে’, ‘করোনা মোকাবিলা করতে না পারলে কেন্দ্র সরকারের পতন অনিবার্য’- এ সব বাক্যের সম্ভাব্যতা ভগ্নাংশ দিয়ে ব্যক্ত করা সম্ভব নয়। তাই আমাদের কখনো কখনো সম্ভবত, খুব সম্ভাব্য বা প্রায় নিশ্চিত এ সব বিশেষণ নিয়ে সন্তুষ্ট থাকতে হয়।

আমরা কোন বাক্যের মধ্যে ‘‘সম্ভবত’’ কথাটি ব্যবহার করি। কিন্তু একই বাক্যের একটিতে ‘‘সম্ভবত’’ না দিয়ে এবং ঐ বাক্যটি পুনরায় লিখে ‘‘সম্ভবত’’ কথাটি ব্যবহার করে কোন অতিরিক্ত তথ্য দেওয়া হয় না। যেমন রাম পরীক্ষায় পাশ করেছে, আবার রাম সম্ভবত পরীক্ষায় পাশ করেছে। নতুন কোন তথ্য কিন্তু দেওয়া হল না। এখন প্রশ্ন হল তাহলে আমরা ‘‘সম্ভবত’’ বা ‘‘সম্ভাব্য’’ কথাগুলি বাক্যে ব্যবহার করি কেন ? নিম্নোক্ত আলোচনায় আমরা উক্ত প্রশ্নেরই উত্তর পাওয়ার চেষ্টা করব।

আসলে ‘‘সম্ভাব্য’’ কথাটি আপেক্ষিক। সম্ভাব্যতা - বাক্য নিষ্কাশিত হয় কোন হেতুবাক্য থেকে। ছোট-বড়, কাছে-দূরে, হ্রস্ব-দীর্ঘ - এ সব বিশেষণের মত ‘‘সম্ভাব্য’’ কথাটিও আপেক্ষিক। ‘এটি ছোট’ বলা অর্থহীন। বলতে হবে এটি ওটির চেয়ে ছোট। কিন্তু তবুও আমরা বলি এই রসগোল্লাটি ছোট, পাটনা কাছে, দিল্লী দূরে ইত্যাদি ইত্যাদি। বলি, কারণ আমরা জানি শ্রোতা বুঝবে কোন বস্তুর সঙ্গে তুলনা করে বলছি কাছে বা দূরে। সে রকম আমরা বলি ঃ এখন বৃষ্টি হবে - এ বাক্য সম্ভাব্য। এ রকম উক্তি করে এ কথা বলতে চাই যে ঃ এমন নয় যে এখন বৃষ্টি হবে - এ বাক্যের যে সম্ভাব্যতা, তার চেয়ে এখন বৃষ্টি হবে - এ বাক্যের সম্ভাব্যতা বেশী। কারণ প্রথম বাক্যটি যে বেশী সম্ভাব্য তার মূলে আমার হাতে তথ্য প্রমাণ আছে। যেমন আকাশে ঘন কালো মেঘ, হাওয়া অফিসের পূর্বাভাস ইত্যাদি ইত্যাদি। এ সব তথ্যের ভিত্তিতে আমি দাবী করি এখন সম্ভবত বৃষ্টি হবে অর্থাৎ এখন বৃষ্টি হবে - এ বাক্য সম্ভাব্য। তবে এ সব তথ্য খুব জোরালো নয় বলে আমরা এমন দাবী করতে পারি না যে ‘‘এখন বৃষ্টি হবেই’’। তবে যুক্তিবিজ্ঞানের ভাষায়, এ সব তথ্যজ্ঞাপক বাক্য ‘‘এখন বৃষ্টি হবে’’ এ বাক্যকে প্রতিপাদ করে না।

এখন ওপরে যা বলা হল তা আমরা এভাবেও ব্যক্ত করতে পারতাম। সম্ভাব্যতা বাক্য মাত্রই কোন-না-কোন হেতুবাক্য (পূর্বকল্প) থেকে নিষ্কশিত সিদ্ধান্ত (অনুকল্প)। কোন হেতুবাক্যের সাক্ষ্য সাবুদের ভিত্তিতেই আমরা বলি 'এখন বৃষ্টি হবে' - বাক্যটি সম্ভাব্য। তবে যে সব হেতুবাক্যের ভিত্তিতে এ রকম উক্তি করা হয়, সে হেতুবাক্য আমরা উল্লেখ করি না। কিন্তু যদি কেউ আমাদের সম্ভাব্যতা উক্তি সম্পর্কে প্রশ্ন করে বা সংশয় প্রকাশ করে তখন আমরা সম্ভাব্যতা উক্তির সমর্থনে হেতুবাক্য উল্লেখ করি।

সম্ভাব্যতার মাত্রা

সম্ভাব্যতার মাত্রা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে সাধারণতঃ ঘটনার সম্ভাব্যতার কথা বলা হয়। আমরা সাধারণতঃ সেই ঘটনাকে সম্ভাব্য বলি, যার সম্পর্কে আমাদের এ বিশ্বাস আছে যে ঘটনাটি না ঘটার চেয়ে ঘটার সম্ভাবনাই বেশী। যখন বলা হয় ‘‘ক সম্ভাব্য’’ তখন এই দাবী করা হয় যে ঃ অধিকাংশ ক্ষেত্রে ক ঘটবে, শতকরা পঞ্চাশের বেশী ক্ষেত্রে ক ঘটবে, ক-এর সম্ভাব্যতা ১/২-এর বেশী। আবার গাণিতিক হিসেবে তোমার লটারী জেতার সম্ভাব্যতা দশ লক্ষ ভাগের এক ভাগ। তখন আমরা কিন্তু বলি না যে, তুমি লটারী জিতবে - এটি সম্ভাব্য।

তবে গণিতে সম্ভাব্যতা বলতে বোঝায় নিশ্চয়তা ও অসম্ভবপরতার মধ্যবর্তী কোন মাত্রা। গণিতে ১ দিয়ে নিশ্চয়তা আর ০ দিয়ে অসম্ভবপরতাকে বোঝানো হয়। আর এদের মধ্যবর্তী ছোট বড় ভগ্নাংশ দিয়ে বোঝানো হয় সম্ভাব্যতার বিভিন্ন মাত্রা। যেমন টস করা মুদ্রাটির সোজা বা উল্টো দিক ওঠার সম্ভাব্যতা ১/২। তবে গণিতে নিশ্চয়তা আর অসম্ভবপরতাকে সম্ভাব্যতার বিশেষ বিশেষ মাত্রা(সম্ভাব্যতার সীমা -নিশ্চয়তা সম্ভাব্যতার উর্দ্ধতম প্রান্তিক সীমা, আর অসম্ভবপরতাকে নিম্নতম প্রান্তিক সীমা বলে) বলে গণা করা হয়। যেমন টস করা মুদ্রাটি সোজা বা উল্টো দিক-এর কোন একটি দিক ওঠার সম্ভাব্যতা কী ? এর উত্তরে আমরা বলি না ঃ যে কোন দিক ওঠার সম্ভাব্যতা নেই, ঘটনাটি সুনিশ্চিত। বলি ঃ যে কোন দিক ওঠার সম্ভাব্যতা ১ । আর একটি প্রশ্ন ঃ সোজা এবং উল্টো দিক একসঙ্গে ওপরে ওঠার সম্ভাব্যতা কী ? এ রকম প্রশ্নের উত্তরে আমরা বলি ঃ এর সম্ভাব্যতা ০ (কারণ সোজা এবং উল্টো দিকের একসঙ্গে ওপরে ওঠা অসম্ভব ব্যাপার)।

সম্ভাব্যতা সম্পর্কে দুরকম তত্ত্বের সাক্ষাৎ পাওয়া যায় ঃ

ক) অবরোহী বা পূর্বসিদ্ধ তত্ত্ব (a-priori theory)

খ) আরোহী বা পরতসাধ্য তত্ত্ব (a posteriori theory)

বা বলা যেতে পারে, সম্ভাব্যতা দু রকম ঃ

ক) অবরোহী সম্ভাব্যতা ও

খ) আরোহী, পর্যবেক্ষণনির্ভর বা পরিসংখ্যানভিত্তিক সম্ভাব্যতা

বা বলতে পারি, সম্ভাব্যতা গণনা পদ্ধতি দু রকম ঃ

ক) অবরোহী গণনা পদ্ধতি ও

খ) আরোহী গণনা পদ্ধতি।

অবরোহী সম্ভাব্যতা

অবরোহী সম্ভাব্যতা তত্ত্ব বা পূর্বতসিদ্ধ সম্ভাব্যতা তত্ত্ব আলোচিত হয় গণিতশাস্ত্রে। আসলে এটি গণিতেরই এক অংশ। গণিতে এরূপ সম্ভাব্যতা নিষ্কাশন করা হয় কয়েকটি স্বতসিদ্ধ পূর্বস্বীকৃতি বা সত্য বলে ধরে নেওয়া হেতু-বাক্য থেকে। আর এজন্য পর্যবেক্ষণ বা পরীক্ষণের কোন প্রয়োজন নেই। যেমন, গণিতের হিসেবে একটি টস করা নিঁখুত মুদ্রার সোজা দিক ওপরে ওঠার সম্ভাব্যতা ১/২ । এ সম্ভাব্যতা জানার জন্য মুদ্রা টস্ করে দেখার দরকার পড়ে না। কারণ টস্ করার পূর্বে থেকে আমরা জানি সোজা দিক ওঠার সম্ভাব্যতা ১/২ । আবার উল্টো দিক ওপরে ওঠার সম্ভাব্যতাও ১/২ । এই সম্ভাব্যতা নিঃসৃত হয় নিম্নোক্ত হেতুবাক্যগুলি থেকে ঃ

মুদ্রাটি নিঁখুত টস্ করলে এটি চিৎ হয়ে পড়বে (খাড়া হয়ে ধারের ওপর দাঁড়িয়ে থাকবে না), এটি এমনভাবে তৈরী যে এর কোনো বিশেষ দিক ওপরে ওঠার ঝোঁক নেই, টস্ করতে গিয়ে কেউ কোন কারসাজি করছে না, এর যে কোন দিক ওঠার সম্ভাবনা সমান সমান ইত্যাদি ইত্যাদি।

অবরোহী সম্ভাব্যতা গণনা পদ্ধতি ঃ

সম্ভাব্যতা সম্পর্কে এখন আমরা একটি সাধারণ সূত্রের কথা জানব। এই সূত্র দিয়ে আমরা সরল ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করতে পারব। পূর্বতসিদ্ধ বা পরতসাধ্য যে তত্ত্বই গ্রহণ করা হোক না কেন, এই সূত্রটি আমাদের মেনে নিতে হবে। সূত্রটির ব্যাখ্যার পূর্বে আমরা কয়েকটি কথা ও সংক্ষেপক প্রতীকের মানে জেনে নেব।

অনুকূল ফল **(favourable outcome [f])**

ধরা যাক্ ক নামক ঘটনাটি ঘটে কিনা তা দেখতে চাই বা ক-এর সম্ভাব্যতা নির্ণয় করতে চাই। এক্ষেত্রে আমরা প্রথমে দেখব ক-এর প্রতিকূল ফলগুলি কী। ধরাযাক্, একবার লুডোর দান ফেলে বিজোড় সংখ্যা ওঠার সম্ভাব্যতা কত তা জানতে চাই। এখানে ১ , ৩, ৫ ওঠা প্রাসঙ্গিক ঘটনাটির অনুকূল ফল।

প্রতিকূল ফল **(unfavourable outcome [u])**

এখন ক-ঘটা যদি অনুকূল ফল হয়, তাহলে ক-এর না ঘটা হল প্রতিকূল বা বিরুদ্ধ বা পরিপূরক ফল। যেমন লুডোর বিজোড় সংখ্যা ওঠা যদি অনুকূল ফল হয়, তাহলে প্রতিকূল ফল হবে বিজোড় সংখ্যা না ওঠা বা জোড় সংখ্যা ওঠা।

যে সূত্রটি এক্ষেত্রে প্রয়োগ করা হবে তাতে কয়েকটি সংক্ষেপক প্রতীক ব্যবহার করা হবে। এগুলি নিম্নে আলোচনা করা হল ঃ

ঘটনাটির অনুকূল ফল বোঝাতে আমরা অ বা f ব্যবহার করব।

অনুকূল বিকল্পের সংখ্যা বোঝাতে।

ঘটনাটির প্রতিকূল ফল বোঝাতে আমরা প বা u ব্যবহার করব।

প্রতিকূল বিকল্পের সংখ্যা বোঝাতে।

মোট বিকল্পের সংখ্যা (total number of alternatives or outcome [t]) -

ঘটনাটি যে বিশেষ শ্রেণীর পরীক্ষার ফলে ঘটে তার সব সম্ভাব্য ফলের সংখ্যা বোঝাতে। ম বা t ব্যবহার করব।

দৃষ্টান্ত ঃ

ধরা যাক্ ছক্কা ওঠা হল প্রাসঙ্গিক ঘটনা। একবার লুডোর দান ফেললে ছক্কা কতভাবে উঠতে পারে ? কেবল একভাবে ছক্কা উঠতে পারে। তাই এখানে অনুকূল ফল অর্থাৎ অ বা f = ১ । আর বিরুদ্ধ বা পরিপূরক ঘটনা বা ছক্কা না ওঠা ঘটতে পারে পাঁচভাবে ঃ যথা - (i) ১ উঠলে, (ii) ২ উঠলে, (iii) ৩ উঠলে, (iv) ৪ উঠলে বা (v) ৫ উঠলে। সুতরাং এখানে f বা u = ৫ ।

আবার যদি লুডোর দানে কোন জোড় সংখ্যা পেতে চাই ঃ এখানে প্রাসঙ্গিক ঘটনা হল ঃ জোড় সংখ্যা ওঠা। এ ঘটনা ঘটতে পারে তিনভাবে ঃ (i) ২ উঠলে, (ii) ৪ উঠলে বা (iii) ৬ উঠলে। সুতরাং অ বা f = ৩ । আবার প্রতিকূল বা বিরুদ্ধ ঘটনাও ঘটতে পারে তিনভাবে ঃ (i) ১ উঠলে, (ii) ৩ উঠলে বা (iii) ৫ উঠলে। সুতরাং এখানে প বা u = ৩।

তাহলে আমরা সহজেই বলতে পারি মোট বিকল্প অর্থাৎ ম বা m = অ+প বা f+u । যথা ধরাযাক্ ছক্কা ওঠা হল প্রাসঙ্গিক ঘটনা। তাহলে অ বা f = ১, প বা u = ৫, আর মোট বিকল্প অর্থাৎ ম বা m হবে অ+প (f+u) অর্থাৎ ১+৫ = ৬ । এ কথার অর্থ হল লুডোর ঘুঁটি নিক্ষেপ করলে যত বিভিন্নভাবে কোনো দিক ওপরে উঠতে পারে তার, অর্থাৎ মোট ফলের সংখ্যা হল ৬ ।

সরল ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা নির্ণয়

এবার আমরা (সরল ঘটনার) সম্ভাব্যতা গণনার সাধারণ সূত্রটি নিম্নোক্তভাবে ব্যক্ত করতে পারি ঃ

সম্ভাব্যতা = অ/অ+প বা সম্ভাব্যতা = অ/ম

বা এভাবে ঃ $P = f/f+u$ বা $P = f/t$

(ওপরের লেখাগুলি পড়তে হবে: পি ইকুয়াল টু এফ্ বাই এফ্ প্লাস ইউ বা পি = এফ্ বাই টি)

এ সূত্র প্রয়োগ করা যায়

(১) যদি মোট বিকল্পের সংখ্যা জানা থাকে (ম-এর মূল্য জানা থাকে), এবং
(২) যদি জানা থাকে যে বিকল্প গুলির প্রত্যেকটি সমসম্ভাব্য, এবং
(৩) যদি অনুকূল বিকল্পের সংখ্যা (অ-এর মূল্য) জানা থাকে।

দ্বিতীয় পূর্বস্বীকৃতিকে - প্রত্যেকটি বিকল্প সমসম্ভাব্য এ পূর্বস্বীকৃতিকে - বলে সমসম্ভাব্যতার নীতি বা অ-পার্থক্যের নীতি (Principle of Indifference)। এ নীতিটিকে এভাবে ব্যক্ত করা যেতে পারে ঃ

অন্য কোন বিকল্পের পরিবর্তে বিশেষ কোন একটি ঘটনা ঘটবে - এ কথা মনে করার

যদি হেতু না থাকে তাহলে প্রত্যেকটি বিকল্পের সমসম্ভাব্যতা সমান।

ওপরে যে সূত্র উল্লেখ করা হল, তা প্রয়োগ করে সরল ঘটনার সম্ভাব্যতা খুব সহজেই নির্ণয় করা যাবে।

যেমন নিম্নে কতকগুলি সরল ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয়ের উদাহরণ দেওয়া হল।

(১) একটি নিখুঁত মুদ্রা টস করলে তার সোজা দিক ওঠার সম্ভাব্যতা ১/২ (ম = ২, অ = ১)।

(২) একটি নিখুঁত লুডোর ঘুঁটি নিয়ে দান ফেললে ৩ ওঠার সম্ভাব্যতা ১/৬ (ম=৬, অ= ১) ।

(৩) একটি নিখুঁত লুডোর ঘুঁটি নিয়ে দান ফেললে ২-এর চেয়ে বড় সংখ্যা ওঠার সম্ভাব্যতা কী ? এক্ষেত্রে ম = ৬, অ = ৪(কারণ অনুকূল ফল চারভাবে পাওয়া যায় ঃ ৩, ৪, ৫, বা ৬ উঠলে)। তাই এক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা = ৪/৬ বা ২/৩ ।

(৪) একটি নিখুঁত লুডোর ঘুঁটি নিয়ে দান ফেললে বিজোড় সংখ্যা ওঠার সম্ভাব্যতা কত ? ম = ৬, আর অ = ৩ (কারণ, বিজোড় সংখ্যা উঠতে পারে তিনভাবে ঃ ১, ৩, বা ৫ উঠলে) তাই এক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা হল ৩/৬ বা ১/২ ।

(৫) একটি নিখুঁত বাণ্ডিলের ভাল করে ভাঁজা তাস থেকে কোনো একটি তাস টেনে নিলে তা টেক্কা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত ? এখানে ম = ৫২। অনুকূল ফল পেতে পারি চারভাবে ঃ হরতনের টেক্কা উঠলে, রুইতনের টেক্কা উঠলে, চিড়িতনের টেক্কা উঠলে, বা ইস্কাপনের টেক্কা উঠলে। কাজেই অ = ৪। সুতরাং একটি টেক্কা ওঠার সম্ভাব্যতা ৪/৫২ বা ১/১৩ ।

(৬) একটি নিখুঁত বাণ্ডিলের ভাল করে ভাঁজা তাস থেকে কোনো একটি তাস টেনে নিলে তা হরতনের তাস হওয়ার সম্ভাব্যতা কত ? আমরা জানি ম = ৫২, অ = ১৩। (কারণ, এক বাণ্ডিল তাসে ১৩টি হরতন থাকে। কাজেই হরতন উঠতে পারে ১৩ ভাবে ঃ হরতনের টেক্কা বা দুরি বা তিরি ইত্যাদি ইত্যাদি উঠলে)। কাজেই হরতনের কোন তাস ওঠার সম্ভাব্যতা ১৩/৫২ বা ১/৪ ।

(৭) একটা নিখুঁত লুডোর ঘুঁটি নিয়ে দান দিলে কোন একটি দিক ওঠার সম্ভাব্যতা কত ? এক্ষেত্রে ম = ৬, অ = ৬ (কারণ আমরা জানি লুডোর ঘুঁটির কোন একটি দিক উঠতে পারে ছয়ভাবে ঃ ১, ২, ৩, ৪, ৫ বা ৬ উঠলে)। সুতরাং এ ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা হল ৬/৬ বা ১ ।

(৮) একটি নিখুঁত মুদ্রা টস করলে বা নিখুঁত লুডোর ঘুঁটি নিক্ষেপ করলে টেক্কা ওঠার সম্ভাব্যতা কত ? এখানে দুই ক্ষেত্রে অ = ০ । কারণ, এখানে অনুকূল কোন বিকল্প নেই। মুদ্রা বা লুডোর ঘুঁটিতে টেক্কা নেই। আর প্রথম ক্ষেত্রে ম = ২, আর দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ম = ৬। তাই প্রথম ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা ০/২ । আর দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ০/৬ । উভয় ক্ষেত্রেই সম্ভাব্যতা = ০ ।

এখন আমরা দেখব সরল ঘটনার না ঘটার সম্ভাব্যতা কিভাবে নির্ণয় করা যায়। যদি আমরা সরল ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা সহজেই বুঝে থাকি তাহলে ঐ ঘটনার না ঘটার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করতে কোন অসুবিধা হবে না। আমরা এখন পূর্বের একই দৃষ্টান্তের সাহায্যে কেবল ঘটার যায়গায় না ঘটা বা প্রতিকূল অবস্থা উল্লেখ করব। পূর্বের মতোই অনুরূপ একটি সূত্রের মাধ্যমে সরল ঘটনা না-ঘটার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করব। সূত্রটি হল ঃ সম্ভাব্যতা = প/ম   অথবা $P = u/t$

দৃষ্টান্ত ঃ আমরা এখানে পূর্বোক্ত ১-এর জায়গায় ১* বা ২-এর জায়গায় ২* ইত্যাদি ইত্যাদি বুঝব।

(১*) একটি নিখুঁত মুদ্রা টস করলে তার সোজা দিক না-ওঠার সম্ভাব্যতা ১/২ (ম = ২, প = ১ ‘সোজা’ না উঠতে পারে ১-ভাবে অর্থাৎ যখন ‘উল্টো’ উঠবে)।

(২*) একটি নিখুঁত লুডোর ঘুঁটি নিয়ে দান ফেললে ৩ না-ওঠার সম্ভাব্যতা ১/৬ (ম=৬, প=৫ কারণ ৩ না উঠতে পারে পাঁচভাবে ঃ ১, বা ২, বা ৪, বা ৫ অথবা ৬ উঠলে) ।

(৩*) একটি নিখুঁত লুডোর ঘুঁটি নিয়ে দান ফেললে ২-এর চেয়ে বড় সংখ্যা না-ওঠার সম্ভাব্যতা কী ? এক্ষেত্রে ম = ৬, প = ২ (কারণ ২-এর চেয়ে বড় সংখ্যা না-উঠতে পারে ১ উঠলে বা ২ উঠলে)। তাই এক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা = ২/৬ বা ১/৩ ।

(৪*) একটি নিখুঁত লুডোর ঘুঁটি নিয়ে দান ফেললে বিজোড় সংখ্যা না-ওঠার সম্ভাব্যতা কত ? ম = ৬, আর প = ৩ (কারণ, বিজোড় সংখ্যা না-উঠতে পারে তিনভাবে ঃ ২, ৪, বা ৬ উঠলে) তাই এক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা হল ৩/৬ বা ১/২ ।

(৫*) একটি নিখুঁত বাণ্ডিলের ভাল করে ভাঁজা তাস থেকে কোনো একটি তাস টেনে নিলে তা টেক্কা না-হওয়ার সম্ভাব্যতা কত ? এখানে ম = ৫২। টেক্কা না-উঠতে পারে ৫২ - ৪ বা ৪৮ খানা তাসের যে কোনো একটি উঠলে। অর্থাৎ টেক্ক না-ওঠা পেতে পারি ৪৮ রকমের। সুতরাং টেক্কা না-ওঠার সম্ভাব্যতা ৪৮/৫২ বা ১২/ ১৩ ।

(৬*) একটি নিখুঁত বাণ্ডিলের ভাল করে ভাঁজা তাস থেকে কোনো একটি তাস টেনে নিলে তা হরতনের তাস না-হওয়ার সম্ভাব্যতা কত ? আমরা জানি ম = ৫২, প = ৩৯। (কারণ, এক বাণ্ডিল তাসে ১৩টি হরতন থাকে। কাজেই ১৩টি হরতন বাদ দিলে ৩৯ খানা তাসের যে কোন একটি উঠলে হরতন না-ওঠা পাওয়া যায় অর্থাৎ হরতন না উঠতে পারে ৩৯ রকমে)। কাজেই হরতনের কোন তাস না-ওঠার সম্ভাব্যতা ৩৯/৫২ বা ৩/৪ ।

(৭*) একটা নিখুঁত লুডোর ঘুঁটি নিয়ে দান দিলে কোন একটি দিক ওপরে না-ওঠার সম্ভাব্যতা কত ? এক্ষেত্রে ম = ৬, প = ০ (কারণ আমরা জানি লুডোর ঘুঁটির কোন একটি দিক ওপরে উঠবে না এমন হতে পারে না)। সুতরাং এক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা হল ০/৬ বা ০ ।

(৮*) একটি নিখুঁত মুদ্রা টস করলে বা নিখুঁত লুডোর ঘুঁটি নিক্ষেপ করলে টেক্কা না-ওঠার সম্ভাব্যতা কত ? এখানে প্রথম ক্ষেত্রে ম = ২, প = ২(কারণ, টেক্কা না-ওঠা পেতে পারি দুভাবে ঃ সোজা দিক উঠলে বা উল্টো দিক উঠলে) । সুতরাং এক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা ২/২ বা ১ । দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ম = ৬, প = ৬ (কারণ, লুডোর ঘুঁটিতে টেক্কা না উঠতে পারে ছয়ভাবে ঃ ১,২,৩,৪,৫,৬ - এদের যেকোনোটি উঠলে)। এক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা ৬/৬ বা ১ । সহজ কথায়, মুদ্রা বা লুডোর ঘুঁটিতে টেক্কা নেই। কাজেই মুদ্রা টস করলে বা লুডোর দান দিলে সব টেক্কা না ওঠাই পাব।

জটিল ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয় ঃ

জটিল ঘটনা কাকে বলে ? যে ঘটনা বিশ্লেষণ করলে একাধিক সরল ঘটনা পাওয়া যায়, যে ঘটনা ঘটতে (বা না-ঘটতে) হলে একাধিক সরল ঘটনা ঘটার (বা না-ঘটার) দরকার তাকে বলে জটিল ঘটনা।

যেমন একটি নিখুঁত মুদ্রা দু বার টস করলে, দু বারই সোজা দিক ওঠার সম্ভাব্যতা কী ?

এখানে দু বার সোজা দিক ওঠা একটি জটিল ঘটনা। কারণ, এ ঘটনা ঘটতে পারে যদি প্রথম টসেও সোজা দিক ওঠে, আবার দ্বিতীয় টসেও সোজা দিক ওঠে। তাহলে প্রথম টসে সোজা দিক ওঠা একটি সরল ঘটনা, আবার দ্বিতীয় টসে সোজা দিক ওঠা আর একটি সরল ঘটনা। এ দুটি ঘটনা ঘটলে আমরা পাই দুবারই সোজা দিক ওঠা নামক একটি জটিল ঘটনা।

আরও একটি দৃষ্টান্ত ঃ

একটি নিখুঁত লুডোর দান দিলে ১ অথবা ২ ওঠার সম্ভাব্যতা কী ?

এক্ষেত্রে কোনো দানে ১-ওঠা একটি সরল ঘটনা, ২-ওঠা আর একটি সরল ঘটনা। তাই ১ অথবা ২-ওঠা একটি জটিল ঘটনা। আমরা সরাসরি সারণীর দ্বারা জটিল ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করতে পারি। জটিল ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয়ের সময় যে বিষয়টিতে আমাদের সর্বাধিক গুরুত্ব দিতে হবে তা হল সর্বপ্রথম মোট বিকল্প নির্ণয় করা। আর তা যদি আমরা করতে পারি তাহলে বাকি কাজ খুবই সহজ।

আমরা পূর্বে দেখেছি মূল সূত্র ঃ

ঘটার সম্ভাব্যতা = f/t , আবার না-ঘটার সম্ভাব্যতা = u/t বা 1 –f/t

প্রয়োগ করে সম্ভাব্যতা নির্ণয় করা যাবে। আমরা নিম্নের কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে বিষয়টিকে সহজে বুঝে নেব।

মুদ্রা নিক্ষেপ ও মোট বিকল্প বা t

একটি মুদ্রার দুটি দিক ঃ সোজা বা H , উল্টো বা T । কাজেই কোনো মুদ্রা ১-বার টস করলে মোট ২-টি($২^১$) বিকল্প সম্ভব H, T । আবার কোনো মুদ্রা দুবার টস করলে ৪টি($২^২$) বিকল্প ঘটনা-সংযোগ (Combination) সম্ভব। ৩-বার টস করলে t = ৮ ($২^৩$)।

বিষয়গুলিকে সারণীর আকারে নিম্নে লেখা হল ঃ

১	২		৩		
১-বার টস	১ম বারে বা ১ম মুদ্রায়	২য় বারে বা ২য় মুদ্রায়	১ম বারে বা ১ম মুদ্রায়	২য় বারে বা ২য় মুদ্রায়	৩য় বারে বা ৩য় মুদ্রায়
H	H	H	H	H	H
T	H	T	H	H	T
	T	H	H	T	H
	T	T	H	T	T
			T	H	H
			T	H	T
			T	T	H
			T	T	T

দ্বিতীয় ও তৃতীয় সারণীর শিরোদেশে ‘১ম বারে বা ১ম মুদ্রায়’, ‘২য় বারে বা ২য় মুদ্রায়’ এসব লেখার তাৎপর্য হল এই যে - ১টি মুদ্রা ২ বার টস করা আর ২টি মুদ্রা ১ বার করে টস করা - দুটি ক্ষেত্রেই এক রকম ঘটনা-সংযোগ সম্ভবপর। ঠিক একইভাবে ১টি মুদ্রা ৩ বার টস করা আর ৩টি মুদ্রা ১ বার করে টস করা - দুটি ক্ষেত্রেই এক রকম ঘটনা-সংযোগ সম্ভবপর। একইভাবে অন্যান্য ঘটনার ক্ষেত্রে একই যুক্তি প্রযোজ্য।

এবার আসা যাক্ উপরোক্ত সারণীর ব্যাখ্যায়। সারণিগুলির বিভিন্ন সারিতে সম্ভবপর বিকল্পগুলি উল্লেখ করা হয়েছে। তার অর্থ হল এরকম প্রত্যেক সারণীর সারিগুলির মধ্যে ‘‘অথবা’’ লেখা আছে ধরে নিতে হবে। যেমন উক্ত সারণীর দ্বিতীয় সারণীতে বলা হয়েছে, কোন মুদ্রা ২ বার টস করলে এরকম ঘটনা-সংযোগ হতে পারে ঃ ২ বারই সোজা (HH), অথবা ১ম বার সোজা ২য় বার উল্টো (HT), অথবা ১ম বার উল্টো ২য় বার সোজা (TH), অথবা ২ বারই উল্টো (TT) ।

আবার এরূপ সারণীর কোন সারিতে পাশাপাশি অর্থাৎ ডাইনে বামে যে অক্ষরগুলি থাকে, তাদের প্রত্যেকটির মধ্যে ‘‘এবং’’ লেখা আছে বলে ধরে নিতে হবে। যেমন তৃতীয় সারণীর ১ম সারিতে যে সংযোগের কথা বলা হয়েছে তা হল ঃ এ এবং এ এবং এ অর্থাৎ ১ম বার (বা ১ম মুদ্রায়) এ, এবং ২য় বার (বা ২য় মুদ্রায়) এ, ৩য় বার (বা ৩য় মুদ্রায়) এ উঠতে পারে।

এরকম সারণী যদি আমাদের সামনে থাকে তাহলে অতি সহজে আমরা মুদ্রা টস সংক্রান্ত জটিল ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করতে পারি।

১) একটি নিখুঁত মুদ্রা ২ বার টস করলে (বা ২টি মুদ্রা ১ বার করে) টস করলে - পরপর ২ বার (বা ২টি মুদ্রাতেই) সোজা দিক (H) ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

এই রকম প্রশ্নের উত্তরে ২য় সারণী দেখলেই বোঝা যায় এখানে t=৪, f=১ সুতরাং ২ বারই সোজা দিক (H) ওঠার (HH পাওয়ার) সম্ভাব্যতা ১/৪। (বলা বাহুল্য ঐ সারণীর HH, অনুকূল বিকল্প আছে মাত্র ১ বার)।

২) একটি নিখুঁত মুদ্রা ২ বার টস করলে (বা ২টি মুদ্রা ১ বার করে) টস করলে - পরপর ২ বার (বা ২টি মুদ্রাতেই) উল্টো দিক (T) ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তরে বলা যায়, এক্ষেত্রে t = ৪ , প = ১ । TT ওঠার সম্ভাব্যতা ১/৪ (যা সারণীর সর্বশেষ সারি দেখলেই বোঝা যাবে)।

৩) একটি নিখুঁত মুদ্রা ২ বার টস করলে (বা ২টি মুদ্রা ১ বার করে) টস করলে - একবার T একবার H ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তরে বলা যায় একবার T একবার H আছে দুটি বিকল্পে, HT আর TH-এতে। অর্থাৎ প = ২, তাই এক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা = ২/৪ বা ১/২ ।

৪) একটি নিখুঁত মুদ্রা ২ বার টস করলে (বা ২টি মুদ্রা ১ বার করে) টস করলে .... only one, কেবল একটি H ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

এই সম্ভাব্যতার উত্তরে আমাদের কেবল একটি কথার অর্থ প্রথমে বুঝে নিতে হবে। কেবল একটি H বলতে অন্যবার T উঠতে পারে। তাই ১ বার H ওঠার ক্ষেত্র হল ঃ (i) HT বা (ii) TH । অর্থাৎ f = ২ । সুতরাং এক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা = ২/৪ বা ১/২ ।

৫) একটি নিখুঁত মুদ্রা ২ বার টস করলে (বা ২টি মুদ্রা ১ বার করে) টস করলে .... at least one, অন্তত একটি (বা অন্তত ১ বার) H ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তরে বলা যায় যা দ্বিতীয় সারণী দেখলে বোঝা যাবে অনুকূল বিকল্প হল (i) HH, (ii) HT আর (iii) TH । তার অর্থ এক্ষেত্রে f =৩, t = ৪ । সুতরাং ১ বার H ওঠার সম্ভাব্যতা ৩/৪ ।

অবশ্য এ প্রশ্নের উত্তর আমরা অন্য একভাবেও পেতে পারি। অন্তত একবার H-ওঠা এ ঘটনা না-ঘটতে পারে যদি কোনো বারই H না ওঠে। কাজেই প্রথমে কোনো বারই H না-ওঠার সম্ভাব্যতা গণনা করে নিয়ে, সেই সম্ভাব্যতাকে ১ থেকে বাদ দিলে অন্তত ১ বার H-ওঠার সম্ভাব্যতা পাওয়া যাবে। এখন পূর্বোক্ত সারণী থেকে আমরা দেখে নিতে পারি ঠিক কোন্ অবস্থায় H-এর একেবারেই না-ওঠার ঘটনাটি ঘটতে পারে ? দ্বিতীয় সারণীর চতুর্থ সারি দেখলেই আমরা দেখতে পাব TT- ঘটনার সংযোগ ঘটেছে। এর অর্থ একবারও H না-ওঠার অনুকূল বিকল্প বা f = ১, t = ৪ তাহলে একবারও H না-ওঠার সম্ভাব্যতা ১/৪ । সুতরাং অন্তত ১ বার H-ওঠার সম্ভাব্যতা ১ - ১/৪ = ৩/৪ ।

৬) একটি নিখুঁত মুদ্রা ৩ বার টস করলে (বা ৩টি মুদ্রা একবার করে টস করলে) পরপর তিনবার (বা তিন মুদ্রাতেই) H ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তর হল ঃ পূর্বোক্ত সারণী দেখলে আমরা বুঝতে পারব, এখানে t = ৮, f = ১ । সুতরাং তিন বারই H-ওঠার (HHH পাওয়ার) সম্ভাব্যতা ১/৮ । লক্ষণীয় বিষয় হল উক্ত সারণীতে HHH-এর সংযোগ আছে মাত্র একবার)।

৭) একটি নিখুঁত মুদ্রা ৩ বার টস করলে (বা ৩টি মুদ্রা একবার করে টস করলে) পরপর তিনবার (বা তিন মুদ্রাতেই) T ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তরে বলা যায় t = ৮, f = ১ । সুতরাং TTT ওঠার সম্ভাব্যতা ১/৮। (উক্ত সারণীর সর্বশেষ সারি দেখলে বোঝা যাবে)।

৮) একটি নিখুঁত মুদ্রা ৩ বার টস করলে (বা ৩টি মুদ্রা একবার করে টস করলে) পরপর তিনবার (বা তিন মুদ্রাতেই) দুবার T ও একবার H ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তর হল দুবার T একবার H পেতে পারি যদি নিম্নোক্ত সংযোগগুলির কোনোটি ঘটে: HTT(৪র্থ সারি), THT(৬ষ্ঠ সারি), বা TTH (৭ম সারি)। এর অর্থ এখানে f = ৩, t = ৮ । তাই এক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা ৩/৮ ।

৯) একটি নিখুঁত মুদ্রা ৩ বার টস করলে (বা ৩টি মুদ্রা একবার করে টস করলে) পরপর তিনবার (বা তিন মুদ্রাতেই) .... only one, কেবল একটি T (বা কেবল একবার T)ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তরে বলা যায় কেবল একবার T (অন্য দুবার H) উঠতে পারে যদি নিম্নোক্ত সংযোগগুলির কোনো একটি ঘটে ঃ (i) HHT(২য় সারি), (ii) HTH (৩য় সারি), বা (iii) THH (৫ম সারি) অর্থাৎ এক্ষেত্রে f = ৩, t = ৮ । সুতরাং এখানে সম্ভাব্যতা ৩/৮ ।

১০) একটি নিখুঁত মুদ্রা ৩ বার টস করলে (বা ৩টি মুদ্রা একবার করে টস করলে) পরপর তিনবার (বা তিন মুদ্রাতেই) .... at least one, অন্তত একটি T ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তরে বলতে পারি যা তৃতীয় সারণী দেখলে বোঝা যাবে) অন্তত একটি বা অন্তত একবার T পেতে পারি যদি নিম্নোক্ত সংযোগগুলির কোন একটি ঘটে ঃ HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT (উক্ত সারণীর প্রথম সারি বাদ দিয়ে বাকি সব সারির বিকল্প)। তার অর্থ এখানে f = ৭, t = ৮ । সুতরাং অন্তত একটি T পাওয়ার সম্ভাব্যতা ৭/৮ ।

আবার উত্তরটি আমরা এভাবেও পেতে পারতাম। কোনো T না-ওঠার অর্থাৎ সব H-ওঠার সম্ভাব্যতা ১/৮ । কাজে কাজেই অন্তত একটি T ওঠার সম্ভাব্যতা হল ১ - ১/৮ = ৭/৮ ।

কি এখন জানতে ইচ্ছা করছে মুদ্রার মাত্র দুটি দিক তাই এক বা একাধিক মুদ্রার টস সংক্রান্ত সম্ভাব্যতা সারণীর সাহায্যে নাহয় অতি সহজে নির্ণয় করা যায়, কিন্তু লুডোর ঘুঁটি কিংবা তাসের বাণ্ডিলের ক্ষেত্রে সারণীর সাহায্যে সম্ভাব্যতা নির্ণয় কিভাবে সম্ভব ? না বন্ধুরা আপাতদৃষ্টিতে বিষয়টিকে যতটা কঠিন মনে হচ্ছে, তা কিন্তু ততটা কঠিন নয়। আর তা যে নয় তা আমরা নিম্নের আলোচনায় দেখতে পাব। এখন লুডোর ঘুঁটির দান সংক্রান্ত সারণী আমরা পরীক্ষা করে দেখব।

আমরা জানি, একটি লুডোর ঘুঁটির ছয়টি দিক। কাজেই একটি নিখুঁত ঘুঁটি নিক্ষেপ করলে (একবার দান দিলে) মোট ৬টি বিকল্প ($৬^{১}$) বিকল্প সম্ভবপর ঃ ১-ওঠা, ২-ওঠা, ৩-ওঠা, ৪-ওঠা, ৫-ওঠা বা ৬-ওঠা। একটি ঘুঁটি ২ বার নিক্ষেপ করলে (বা ২টি ঘুঁটি একবার করে নিক্ষেপ করলে) ৩৬টি ($৬^{২}$) বিকল্প ঘটনা-সংযোগ সম্ভবপর। একটি ঘুঁটি ৩ বার নিক্ষেপ করলে (বা তিনটি ঘুঁটি একবার করে নিক্ষেপ করলে) ২১৬টি ($৬^{৩}$) বিকল্প ঘটনার সংযোগ সম্ভবপর।

একটি ঘুঁটি ২ বার বা ২টি ঘুঁটি একবার করে নিক্ষেপ করলে যে সব বিকল্প ঘটনার সংযোগ সম্ভবপর, তা নীচের সারণীর সাহায্যে দেখানো হল ঃ

১ম -২য়	১ম -২য়	১ম - ২য়	১ম -২য়	১ম - ২য়	১ম - ২য়
১ - ১	২ - ১	৩ - ১	৪ - ১	৫ - ১	৬ - ১
১ - ২	২ - ২	৩ - ২	৪ - ২	৫ - ২	৬ - ২
১ - ৩	২ - ৩	৩ - ৩	৪ - ৩	৫ - ৩	৬ - ৩
১ - ৪	২ - ৪	৩ - ৪	৪ - ৪	৫ - ৪	৬ - ৪
১ - ৫	২ - ৫	৩ - ৫	৪ - ৫	৫ - ৫	৬ - ৫
১ - ৬	২ - ৬	৩ - ৬	৪ - ৬	৫ - ৬	৬ - ৬

* প্রত্যেক শীর্ষস্তম্ভে ‘১ম’ , ‘২য়’-এর পরে ‘‘বারে’’ বা ‘‘ঘুঁটি’’তে পড়তে হবে।

দৃষ্টান্ত ঃ

১) একটি নিখুঁত ঘুঁটি ২ বার (বা ২টি ঘুঁটি ১ বার করে) নিক্ষেপ করলে পরপর ২ বার (বা দুটি ঘুঁটিতে একবার করে) ৬ ওঠার অর্থাৎ ৬ - ৬ পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তর ঃ এখানে t = ৩৬, f = ১ (সারণীটি দেখলে আমরা বুঝতে পারব ৬-৬ এই ঘটনা-সংযোগ আছে মাত্র ১ বার)। তাই এক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা ১/৩৬ ।

২) একটি নিখুঁত ঘুঁটি ২ বার (বা ২টি ঘুঁটি ১ বার করে) নিক্ষেপ করলে পরপর ২ বার (বা দুটি ঘুঁটিতে একবার করে) , অন্তত একবার ১-ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তর ঃ (সারণীটি লক্ষ্য করলে আমরা দেখতে পাব) t = ৩৬, f = ১১ । সুতরাং অন্তত ১ বার ১ ওঠার (১-এর সঙ্গে ২, ৩, ৪ ইত্যাদিও থাকতে পারে) সম্ভাবত্যা হল ১১/৩৬ ।

এখন আমরা যে সমস্যাগুলির সমাধান করব তা একটু ভিন্ন ধরনের ঃ যেমন দুটি ঘুঁটিতে যে দুটি সংখ্যা ওঠে তাদের যোগ করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, সে রকম কোন নির্দিষ্ট সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত ? যেমন ১২ বা ৭ বা ৮ ইত্যাদি পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত ?

৩) একটি নিখুঁত ঘুঁটি ২ বার (বা ২টি ঘুঁটি ১ বার করে) নিক্ষেপ করলে পরপর ২ বার (বা দুটি ঘুঁটিতে একবার করে) ১২ ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তর ঃ এখানে t = ৩৬, কিন্তু f = ১ । কারণ, কেবল ৬-৬ উঠলেই আমরা ১২ পেতে পারি। আর ঐ সারণী লক্ষ্য করলেই আমরা দেখতে পাব একেবারে সর্বশেষ সারিতে ঐ ঘটনা-সংযোগ আছে। তাই এখানে সম্ভাব্যতা হল ১/৩৬ ।

৪) একটি নিখুঁত ঘুঁটি ২ বা (বা ২টি ঘুঁটি ১ বার করে) নিক্ষেপ করলে পরপর ২ বার (বা দুটি ঘুঁটিতে একবার করে) ৭ ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তর ঃ উক্ত সারণীটি লক্ষ্য করলে আমরা দেখতে পাব, যেরূপ সংযোগগুলিতে ৭ পাওয়া যায় তা হল ঃ যেমন - ১-৬, ২-৫, ৩-৪, ৪-৩, ৫-২, ৬-১ । তার অর্থ এক্ষেত্রে t = ৩৬ হলেও f = ৬ , সুতরাং এখানে সম্ভাব্যতা হল ৬/৩৬ বা ১/৬ ।

৫) একটি নিখুঁত ঘুঁটি ২ বা (বা ২টি ঘুঁটি ১ বার করে) নিক্ষেপ করলে পরপর ২ বার (বা দুটি ঘুঁটিতে একবার করে) ৯ ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তর ঃ সারণী থেকে ৯ পেতে পারি এইভাবে ঃ ৩-৬, ৪-৫, ৫-৪, ৬-৩ । তার অর্থ এখানে f = ৪, t = ৩৬ । তাই সম্ভাব্যতা হল ৪/৩৬ বা ১/৯ ।

সরল ও স্বতন্ত্র ঘটনার সম্ভাব্যতা যুক্ত করে জটিল ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয় ঃ

আমরা ইতিপূর্বে প্রাসঙ্গিক সারণী থেকে কীভাবে জটিল ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করতে হয় তা দেখেছি। এখন আমরা দেখব সরল ঘটনার সম্ভাব্যতা যুক্ত করে অর্থাৎ যোগ বা গুণ করে জটিল ঘটনার সম্ভাব্যতা কীভাবে নির্ণয় করতে হয়। এই পদ্ধতি বুঝতে হলে প্রথমেই আমাদের কয়েকটি সংক্ষেপক প্রতীককে বুঝে নিতে হবে যার তালিকা নিম্নে দেওয়া হল ঃ

সংক্ষেপক প্রতীক	কোন্ ঘটনার সংক্ষেপক প্রতীক
P (a)	a ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা
P(b)	b ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা
P(a)	a ঘটনা না-ঘটার সম্ভাব্যতা
P (a and b)	a এবং b ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা
P (a or b)	a or b ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা

দৃষ্টান্ত ঃ

ধরাযাক্ ত হল একটি টস করা মুদ্রার সোজা দিক-ওঠা। তাহলে P(a) = ১/২। এ কথাটি আমরা এভাবেও বলতে পারি ঃ P(H) = ১/২ বা এভাবে P (সোজা ওঠা) = ১/২ । ধরাযাক্ b হল লুডোর দানে ৬-ওঠা। তাহলে P(b) = ১/৬। সেরকম P (বিজোড় সংখ্যা) = ১/২ , P (জোড় সংখ্যা) = ১ - ১/২ = ১/২ । P (৬-ওঠা এবং ৬-ওঠা) = ১/৩৬ ।

দু রকম ঘটনা সংযোগ

এই যে সরল ও স্বতন্ত্র ঘটনার সম্ভাব্যতা যুক্ত করে জটিল ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয় তা দু রকম জটিল ঘটনা সংযোগে হতে পারে। (১) সংযৌগিক ঘটনা ও (২) বৈকল্পিক ঘটনা। যে জটিল ঘটনা বর্ণনা করতে আমরা ‘‘ক এবং খ’’ ("a and b") - এর আকার ব্যবহার করি, তাকে বলে সংযৌগিক ঘটনা। আর যে জটিল ঘটনা বর্ণনা দিতে আমরা ‘‘ক অথবা খ’’ ("a or b") - এর আকার ব্যবহার করি, তাকে বলে বৈকল্পিক ঘটনা। যথা ২ বার লুডোর দান দিলে ২ বারই ৬- ওঠা, অর্থাৎ ‘প্রথমবারে ৬-ওঠা, এবং দ্বিতীয়বারেও ৬-ওঠা’ সংযৌগিক ঘটনা। আবার কোনো বারে ৬-ওঠার অর্থ - ‘প্রথমবারে ৬-ওঠা অথবা দ্বিতীয়বারে ৬-ওঠা’ হল বৈকল্পিক ঘটনা। তাই এখন আমরা এই জাতীয় প্রশ্নের উত্তর খোঁজার চেষ্টা করব ঃ (১) ক এবং খ ঘটার সম্ভাব্যতা কী ? (২) ক অথবা খ ঘটার সম্ভাব্যতা কী ? এই জাতীয় প্রশ্নের উত্তর পাওয়া যাবে দুটি সূত্রের মাধ্যমে। আমরা সূত্র দুটি নিম্নে আলোচনা করলাম।

সংযৌগিক ঘটনা ক এবং খ ঘটার সম্ভাব্যতা গুণের সূত্র (Multiplication Theorem) ঃ

এখন আমরা যে ঘটনাটি আলোচনা করতে যাচ্ছি তা প্রযুক্ত হবে যদি সংযৌগিক ঘটনার অঙ্গ-ঘটনাগুলি স্বতন্ত্র হয়। প্রথমেই আমাদের ‘‘স্বতন্ত্র’’ শব্দের অর্থ জানতে হবে। যদি এমন হয় যে ক-ঘটা খ-ঘটাকে, বা খ-ঘটা ক-ঘটাকে কোনোভাবে প্রভাবিত করে না, তাহলে বলা হয় ক , খ - এরা পরস্পর স্বতন্ত্র ঘটনা। যথা প্রথম ঘুঁটিতে ১-ওঠা দ্বিতীয় ঘুঁটিতে কী উঠবে অর্থাৎ ২, নাকি ৩, নাকি ৪, নাকি ৫, নাকি ৬ তা প্রভাবিত করে না। সুতরাং ১-ওঠা, ২-ওঠা, ৩-ওঠা ইত্যাদি স্বতন্ত্র ঘটনা।

এবার ধরাযাক্ a একটি স্বতন্ত্র ঘটনা, b আর একটি স্বতন্ত্র ঘটনা; এবং আমরা a and b-এর সম্ভাব্যতা বা P (a and b) , নির্ণয় করতে চাই। তাহলে নিম্নোক্ত সূত্রটি প্রয়োগ করতে হবে।

$$P\ (a \text{ and } b) = P(a) \times P(b)$$

অর্থাৎ a-এর সম্ভাব্যতা ও b-এর সম্ভাব্যতা গুণ করলেই a and b-এর সম্ভাব্যতা পাওয়া যাবে। এই সূত্রকে বলে গুণের সূত্র। [একইভাবে P(a and b and c) = P(a)xP(b)xP(c)। অনুরূপভাবে, P(a and b and c and d) = P(a)xP(b)xP(c)xP(d) ইত্যাদির মূল্য নির্ণয় করতে হবে]।

যেমন -

১) একটি নিখুঁত মুদ্রা ২ বার টস করলে ২ বারই সোজা দিক (H) ওঠার (প্রথম বার H এবং দ্বিতীয়বারও H-ওঠার, অর্থাৎ HH-ওঠার) সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তর ঃ প্রথমবারে H-ওঠার সম্ভাব্যতা ১/২, দ্বিতীয়বারে ১/২ । সুতরাং দুবার এ-ওঠার সম্ভাব্যতা ১/২ x ১/২ বা ১/৪ ।

২) একটি নিখুঁত ঘুঁটি নিয়ে দুবার লুডোর দান দিলে দুবারই ৩ (প্রথমবার ৩ এবং দ্বিতীয়বার ৩) ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তর ঃ প্রত্যেকবার ৩ ওঠার সম্ভাব্যতা ১/৬ । সুতরাং দুবার ৩ ওঠার সম্ভাব্যতা ১/৬ x ১/৬ = ১/৩৬ ।

৩) একটি নিখুঁত বাণ্ডিলের ভাল করে ভাঁজা তাস থেকে একখানা করে তাস টেনে নিয়ে দেখা হয় কী উঠল ? তারপর তাসখানা আবার বাণ্ডিলে মিশিয়ে দেওয়া হয়। এরকম করে পরপর ৩ বার তাস টেনে নিলে ৩ বারই হরতন ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তর ঃ প্রত্যেকবার হরতন ওঠার সম্ভাব্যতা ১৩/৫২ বা ১/৪ । সুতরাং ৩ বারই হরতন ওঠার সম্ভাব্যতা ১/৪ x ১/৪ x ১/৪ বা ১/৬৪ ।

৪) একটি নিখুঁত মুদ্রা ১০ বার টস করলে ১০ বারই সোজাদিক (এ) ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তর ঃ প্রত্যেকবার এ ওঠার সম্ভাব্যতা ১/২ । সুতরাং ১০ বারই এ ওঠার সম্ভাব্যতা হল $(১/২)^{১০}$ বা ১/ ১০২৪ ।

৫) দুবার লুডোর দান দিলে দুবারই ৬ না-ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তর ঃ প্রত্যেক বারই ৬ না-ওঠার সম্ভাব্যতা ৫/৬ । সুতরাং দুবারই ৬ না-ওঠার সম্ভাব্যতা হল ৫/৬ x ৫/৬ = ২৫/৩৬ ।

বৈকল্পিক ঘটনা ক অথবা খ ঘটার সম্ভাব্যতা ঃ

যোগের সূত্র **(Addition Theorem)**

এবার আমরা যে সূত্রটি শিখব তা হল - যদি এমন হয় যে, জটিল (এখানে বৈকল্পিক ঘটনা বুঝতে হবে)ঘটনার অঙ্গ-ঘটনাগুলি বিসংবাদী (exclusive) বিকল্প। ‘‘বিসংবাদী বিকল্প’’ বলতে যদি এমন হয় যে ক আর খ একসঙ্গে ঘটতে পারে না, তখন বলা হয় ক আর খ বিসংবাদী বিকল্প। যেমন একটি মুদ্রা টস করলে H, T একসঙ্গে উঠতে পারে না; তাই H-ওঠা, T-ওঠা বিসংবাদী বিকল্প। একইভাবে একটি লুডোর ঘুঁটিতে ৫, ৬ এদের দুটিই একসঙ্গে উঠতে পারে না; তাই ৫-ওঠা, আর ৬-ওঠা বিসংবাদী বিকল্প।

ধরা যাক্ একটি ঘটনা, আর একটি ঘটনা; এবং আমরা a অথবা b-এর সম্ভাব্যতা, বা P(a or b) নির্ণয় করতে চাই। তাহলে আমরা নিম্নের সূত্রটি প্রয়োগ করব।

$$P\ (a \text{ or } b) = P(a) + P(b)$$

[একইভাবে $P\ (a \text{ or } b \text{ or } c) = P(a) + P(b) + P(c)$]

অর্থাৎ a-এর সম্ভাব্যতা ও b-এর সম্ভাব্যতা যোগ করলে a or b-এর সম্ভাব্যতা পাওয়া যাবে। এই সূত্রকে বলে যোগের সূত্র।

যেমন,

১) একটি নিখুঁত মুদ্রা টস করলে H অথবা T ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তর ঃ P(H) = ১/২, P(T) = ১/২, সুতরাং এক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা ১/২ + ১/২ বা ১ ।

২) একটি নিখুঁত লুডোর ঘুঁটিতে ৩ অথবা ৪ ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তর ঃ P (৩-ওঠা) = ১/৬, (৪-ওঠা) = ১/৬ । সুতরাং ৩ অথবা ৪ ওঠার সম্ভাব্যতা ১/৬ + ১/৬ = ২/৬ বা ১/৩ ।

৩) একটি তাসের নিখুঁত বাণ্ডিল থেকে একখানা তাস টেনে নিলে তা হরতন, রুইতন বা ইস্কাবন হওয়ার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তর ঃ P (হরতন) = ১৩/৫২, P (রুইতন) = ১৩/৫২, P (ইস্কাবন) = ১৩/৫২; সুতরাং এক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা হল ঃ ১৩/৫২ + ১৩/৫২ + ১৩/৫২ = ৩৯/৫২ বা ৩/৪ ।

অবিসংবাদী বৈকল্পিক ঘটনা ( ) .... অন্তত একটি (একবার)....... যোগের সূত্র প্রয়োগ করে ঃ

প্রথমে আমাদের অবিসংবাদী বিকল্প বলতে কি বোঝায় তা জেনে নিতে হবে। যদি এমন হয় যে ক আর খ একসঙ্গে ঘটতে কোনো অসুবিধা হয় না (যেমন একটি নিখুঁত মুদ্রা দুবার টস করলে অন্তত একবার H ওঠার অথবা দ্বিতীয়বারে H ওঠার অথবা দুবারই H ওঠার ক্ষেত্রে কোনো সমস্যা হয় না) তখন যে বিকল্পের কথা বলা হয় তা অবিসংবাদী বিকল্প। এক্ষেত্রে যদি আমরা যোগের সূত্র প্রয়োগ করতাম তাহলে নিশ্চিত ভুল হত। যেমন প্রথমবার H ওঠার সম্ভাব্যতা ১/২, দ্বিতীয়বার H ওঠার সম্ভাব্যতা ১/২ । তাহলে এক্ষেত্রে বলতে হত সম্ভাব্যতা = ১/২ + ১/২ = ১ । কিন্তু দুবার টস করলে অন্তত একবার H উঠবে, এটি সুনিশ্চিত নয়। কারণ, দুবারই T উঠতে পারে।

প্রাসঙ্গিক সারণীর সাহায্যে যে এজাতীয় প্রশ্নের উত্তর সহজেই পেতে পারি তা আমরা পূর্বে দেখে নিয়েছি। এখন আরও দুইভাবে এই জাতীয় প্রশ্নের উত্তর আমরা পেতে পারি। নিম্নে এই পদ্ধতিগুলি আলোচনা করা হল।

১) প্রথমত ঃ সম্ভবপর ঘটনা-সংযোগগুলিকে বিসংবাদী বিকল্পে রূপান্তরিত করে নিয়ে যোগের সূত্র প্রয়োগ করে সম্ভাব্যতা উদ্ধার করতে পারি। উক্ত ক্ষেত্রে আমরা পাব এই বিসংবাদী বিকল্পগুলি ঃ HH, HT, TH । এগুলি বিসংবাদী বিকল্প। সুতরাং এক্ষেত্রে যোগের সূত্রটি প্রয়োগ করা যাবে। HH, HT প্রভৃতি সংযৌগিক ঘটনার সম্ভাব্যতা পেতে পারি গুণের সূত্র প্রয়োগ করে। এ সূত্র প্রয়োগ করে আমরা পাই ঃ

P (H and H) = ১/২ x ১/২ বা ১/৪ P (H and T) = ১/২ x ১/২ বা ১/৪ ।

P (T and H) = ১/২ x ১/২ বা ১/৪ ।

সুতরাং HH অথবা HT অথবা TH ওঠার, বা অন্তত একবার H ওঠার, সম্ভাব্যতা হল ১/৪ + ১/৪ + ১/৪ বা ৩/৪ ।

২) দ্বিতীয়ত ঃ প্রথমে অন্তত একবারও H-না ওঠার অর্থ H একেবারেই না ওঠার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করে নিয়ে তা ১ থেকে বাদ দিয়ে অন্তত ১ বার H ওঠার সম্ভাব্যতা পেতে পারি যা আমরা পূর্বে আলোচনা করেছি।

এখন আন্তত একবার H ওঠা এ ঘটনা না ঘটতে পারে (অর্থাৎ H একেবারেই না উঠতে পারি) যদি ২ বারই T উঠে, অর্থাৎ TT-এ সংযোগটি ঘটে। এখন TT-এর সম্ভাব্যতা হল ১/২ x ১/২ বা ১/৪ । সুতরাং TT না-ওঠার সম্ভাব্যতা হল, বা অন্তত একবার এ ওঠার সম্ভাব্যতা হল, ১ - ১/৪ বা ৩/৪ ।

এখন আমরা আরও দুটি দৃষ্টান্তের সাহায্যে বিষয়টিকে আরও সহজ অনুধাবনযোগ্য করে নিতে পারি।

দুটি নিখুঁত ঘুঁটি নিক্ষেপ করলে অন্তত একটিতে ৫ ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তর ঃ সারণীর সাহায্যে এজাতীয় প্রশ্নের উত্তর সহজে পেতে পারি তা আমরা ইতিপূর্বে দেখে নিয়েছি। এছাড়াও আরও দুভাবে এই সম্ভাব্যতা নির্ণয় করতে পারি।

১) এক্ষেত্র মোট তিনটি বিসংবাদী বিকল্প সম্ভবপর ঃ (ক) প্রথম ঘুঁটিতে ৫ ওঠা, দ্বিতীয় ঘুঁটিতে ৫ না ওঠা, (খ) প্রথম ঘুঁটিতে ৫ না ওঠা, দ্বিতীয় ঘুঁটিতে ৫ ওঠা (গ) দুটি ঘুঁটিতেই ৫ ওঠা । আমরা ৫ না ওঠার সংক্ষেপক হিসেবে এখানে x লিখব । তাহলে তিনটি বিসংবাদী বিকল্প হবে নিম্নরূপ ঃ

৫ ওঠা এবং ৫ না ওঠা, ৫ না ওঠা এবং ৫ ওঠা, ৫ ওঠা এবং ৫ ওঠা

এখন P(৫-ওঠা) = ১/৬, P(৫-না-ওঠা) = ৫/৬ ।

সুতরাং P(৫ ওঠা এবং ৫ না ওঠা) = ১/৬ x ৫/৬ = ৫/৩৬

P(৫ না ওঠা এবং ৫ ওঠা) = ৫/৬ x ১/৬ = ৫/৩৬

(৫ ওঠা এবং ৫ ওঠা) = ১/৬ x ১/৬ = ১/৩৬

সুতরাং P(৫ ওঠা এবং ৫ না ওঠা, অথবা ৫ না ওঠা এবং ৫ ওঠা, অথবা ৫ ওঠা এবং ৫ ওঠা) = ৫/৩৬ + ৫/৩৬ + ১/৩৬ = ১১/৩৬

(২) অন্তত একটিতে ৫-ওঠা - ঘটনা না-ঘটতে পারে যদি ৫ না ওঠা এবং ৫ না ওঠা ওঠে। এখন P(৫ না ওঠা এবং ৫ না ওঠা) = ৫/৬ x ৫/৬ বা ২৫/৩৬ । ১ থেকে এ সম্ভাব্যতা বাদ দিয়ে পাই ১ - ২৫/৩৬ বা ১১/৩৬ । এটি অন্তত একটিতে ৫-ওঠার সম্ভাব্যতা।

আর একটি উদাহরণ ঃ

ধরাযাক্ একটি পাত্রে ২টি সাদা বল ও ৩টি কালো বল আছে।

অপর একটি পাত্রে ৬টি সাদা বল ও ৪টি কালো বল আছে এবং

প্রত্যেকটি বল সমান আকৃতি ও সমান ওজনের।

এখন প্রত্যেক পাত্র থেকে ১টি করে বল তুলে নিলে (এবং প্রত্যেকবার তোলা বল আবার ঐ ঐ পাত্রে ফিরিয়ে দিলে) অন্তত একটি সাদা বল ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তর ঃ এক্ষেত্রে সম্ভবপর তিনটি বিসংবাদী বিকল্প হল ঃ

(১) প্রথম পাত্র থেকে সাদা বল(W_1) এবং দ্বিতীয় পাত্র থেকে কালো বল (B_2)
(২) প্রথম পাত্র থেকে কালো বল (B_1) এবং দ্বিতীয় পাত্র থেকে সাদা বল(W_2)
(৩) প্রথম পাত্র থেকে সাদা বল (W_1) এবং দ্বিতীয় পাত্র থেকে সাদা বল (W_2)

সংক্ষেপে, তিনটি বিকল্প হল ঃ

(১) W_1 and B_2 (2) B_1 and W_2 (3) W_1 and W_2

লক্ষণীয় বিষয় হল প্রথম পাত্রের ক্ষেত্রে t = ৫, দ্বিতীয় পাত্রের ক্ষেত্রে t = ১০

এলন, P (W_1 and B_2) = ১/৫ x ৪/১০ = ৮/৫০

P (B_1 and W_2) = ৩/৫ x ৬/১০ = ১৮/৫০

P (W_1 and W_2) = ২/৫ x ৬/১০ = ১২/৫০

এখন, অন্তত একটি সাদা বল ওঠা মানে ঃ

W_1 and B_2 অথবা B_1 and W_2 অথবা W_1 and W_2

ওঠা । কাজেই অন্তত একটি সাদা বল ওঠার সম্ভাব্যতা হল ঃ

৮/৫০ + ১৮/৫০ + ১২/৫০ = ৩৮/৫০ = ১৯/২৫

এ উত্তর আমরা এভাবেও পেতে পারতাম। অন্তত একটি সাদা বল না ওঠা ঘটতে পারে যদি দুটি কালো বল ওঠে, যদি B_1 and B_2 সংযোগটি ঘটে।; এখন

P (B_1 and B_2)= ৩/৫ ঃ ৪/ ১০ = ১২/৫০ = ৬/২৫

এখন, ১ থেকে ৬/২৫ বিয়োগ করে পাই ঃ ১ - ৬/২৫ বা ১৯/২৫ । এটি B_1 and B_2 না ওঠার, বা অন্তত একটি সাদা বল ওঠার সম্ভাব্যতা।

অসতন্ত্র ঘটনার সম্ভাব্যতা যুক্ত করে জটিল ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয়

এক্ষেত্রে অসতন্ত্র ঘটনার সংযোগ ঃ যদি তাহলে ও ক এবং খ-এর সম্ভাব্যতা নির্ণয়ে গুণের সূত্রের প্রয়োগ।

এখানে যে সংক্ষেপক প্রতীকগুলির ব্যবহার হবে তার অর্থ আমরা প্রথমে জেনে নেব।

সংক্ষেপক প্রতীক	কোন্ কথার সংক্ষেপক
Pa(b)	যদি a ঘটে তাহলে b-ঘটার সম্ভাব্যতা
Pb(a)	যদি b ঘটে তাহলে a-ঘটার সম্ভাব্যতা

দৃষ্টান্ত ঃ

ধরাযাক্ ত হল হরতনের তাস ওঠা। থ হল রুইতনের তাস ওঠা। মনে করি, প্রথম খেপে হরতন উঠল। তাহলে, রুইতন ওঠার সম্ভাব্যতা কত ? এ কথাটি আমরা লিখব এইভাবে ঃ Pa(b)-এর সম্ভাব্যতা কত বা এভাবে ঃ P হরতন (রুইতন) কত ? প্রসঙ্গত এর উত্তর হল ঃ ১৩/৫১ ।

আমরা জানি, একটি নিখুঁত বাণ্ডিলের ভালো করে ভাঁজা তাস থেকে একটি তুলে নিলে ঐ তাসটি হরতন হওয়ার (এই ঘটনাটিকে ক বলে চিহ্নিত করব) সম্ভাব্যতা ১৩/৫২ । ধরাযাক্ প্রথম টানার ক্ষেত্রে হরতন উঠল। এই তাসটি বাণ্ডিলে ফেরৎ দিয়ে এবং ভালো করে ভেঁজে আবার একটি তাস টানলে ঐ তাসটি হরতন হওয়ার সম্ভাব্যতাও ১৩/৫২ । কিন্তু টানা তাসটি আর বাণ্ডিলে ফেরৎ না পাঠিয়ে যদি দ্বিতীয়বারে আর একটি তাস টানা হয় তাহলে ঐ তাসটি হরতন হওয়ার(এ ঘটনাকে খ বলে চিহ্নিত করব) সম্ভাব্যতা কত ? এ ক্ষেত্রে খ কিন্তু স্বতন্ত্র ঘটনা নয়; কারণ প্রথম ক্ষেত্রের ক খ-কে প্রভাবিত করে। এক্ষেত্রে ঢ় = ৫১, প = ১২; সুতরাং এখন হরতন ওঠার সম্ভাব্যতা ১২/৫১ ।

আমরা জানি, যদি সংযৌগিক ঘটনার অঙ্গ ঘটনাগুলি স্বতন্ত্র হয় তাহলে গুণের সূত্র প্রয়োগ করে সমস্যার সমাধান করা যায়। কিন্তু যদি আমরা একটু সাবধানতা অবলম্বন করি অর্থাৎ t, f সম্পর্কে খেয়াল রাখি তাহলে অস্বতন্ত্র ঘটনা সংযোগের বেলাও গুণের সূত্র প্রয়োগ করে সম্ভাব্যতা নির্ণয় করা যায়। এ রকম ক্ষেত্রে নিম্নের সূত্রটি প্রয়োগ করা যায়।

P(a and b) = P(a) x Pa(b)

মনে কর, (a) হল ঃ হরতনেরত তাস ওঠা

(b) হল ঃ (আর একখানা) হরতনের তাস ওঠা

Pa(b) হল ঃ প্রথম ক্ষেত্রে হরতনের তাস উঠলে, এবং ঐ তাসটি বান্ডিলে ফেরৎ না দিলে, আবার হরতনের তাস ওঠা।

প্রশ্ন হল এই পরিস্থিতিতে P(a and b) , a-এবং-b ওঠার, মানে - পরপর দু খানা হরতন ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তর ঃ (a) = ১৩/৫২ Pa (b) = ১২/৫১

সুতরাং P (a) x Pa (b) = ১৩/৫২ x ১২/৫১ = ১৫৬/২৬৫২ = ১/ ১৭

সুতরাং এক্ষেত্রে P(a and b) = ১/ ১৭ ।

আর একটি উদাহরণ ঃ

একটি তাস তুলে নিলে এবং কোন বারেই ওঠা তাসটি বাণ্ডিলে ফেরৎ না দিলে, পরপর ৫ বার রুইতন ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তর ঃ ১৩/৫২ x ১২/৫১ x ১১/৫০ x ১০/৪৯ x ৯/৪৮ = ৩৬/৬৬৬৪০ ।

আরও একটি উদাহরণ ঃ

ধরাযাক্ কোনো বাক্সে সমান আকারের ও সমান ওজনের ৪টি সাদা বল আর ৬টি কালো বল আছে। পরপর একটি বল তুলে নিলে এবং কোনো বারই তোলা বল বাক্সে ফেরৎ না দিলে তিনবার পরপর সাদা বল ওঠার সম্ভাব্যতা কত ?

উত্তরঃ ৪/১০ x ৩/৯ x ২/৮ = ২৪/৭২০ বা ১/৩০ ।

অস্বতন্ত্র ঘটনার সংযোগ দিয়ে গঠিত বৈকল্পিক ঘটনার সম্ভাব্যতা ঃ গুণ ও যোগের সূত্রের যুগ্ম প্রয়োগ ঃ

গুণ ও যোগের সূত্রের যুগ্ম প্রয়োগের কয়েকটি দৃষ্টান্ত আমরা দেখে নিতে পারি। আনেক সময় আমরা এমন বৈকল্পিক ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করতে চাই যার অঙ্গগুলি সংযৌগিক ঘটনা - এমন সংযৌগিক ঘটনা যার অঙ্গ-ঘটনা অ-স্বতন্ত্র। এ রকম বৈকল্পিক ঘটনার সম্ভাব্যতা কি করে নির্ণয় করতে হয় তা নিম্নের উদাহরণটি দেখলে সহজে বুঝতে পারব।

প্রশ্ন ঃ তাস খেলায় কোনো খেলোয়াড় পরপর ৫ খানা এক রঙের তাস পাওয়ার সম্ভাব্যতা কী ?

উত্তর ঃ ৫ খানা এক রঙের তাস কেউ পেতে পারে যদি তার হাতে,

(১) পরপর পাঁচখানা হরতনের তাস ওঠে [A] অথবা,

(২) পরপর পাঁচখানা রুইতনের তাস ওঠে [B] অথবা,

(৩) পরপর পাঁচখানা ইস্কাপনের তাস ওঠে [C] অথবা,

(৪) পরপর পাঁচখানা চিড়িতনের তাস ওঠে [D]।

বলাবাহুল্য, এক্ষেত্রে P(a) x Pa(b) সূত্রটি প্রয়োগ করতে হবে। কারণ, যে তাস কাউকে বেটে দেওয়া হয়, তা একই খেলায় ফেরৎ নেওয়া হয় না। ফলে, পরপর তাস বেটে দিলে আর ক্রমশ কমে যায়। এখন, ৫ খানা হরতন ওঠার সম্ভাব্যতা, বা

P(A) = ১৩/৫২ ১২/৫১ ১১/৫০ ১০/৪৯ ৯/৪৮ = ৩৩/৬৬৬৪০

একইভাবে, P(B) = ঐ

P(C) = ঐ

P(D) = ঐ

সুতরাং এক হাতে কোনো এক রঙের ৫ খানা (চার রঙের তাস - এদের কোনো এক রঙের ৫ খানা) ওঠার সম্ভাব্যতা বা,

P(A or B or C or D) = ৩৩/৬৬৬৪০ + ৩৩/৬৬৬৪০ + ৩৩/৬৬৬৪০ + ৩৩/৬৬৬৪০ + ৩৩/৬৬৬৪০

আরোহী সম্ভাব্যতা ঃ পরিসংখ্যা তত্ত্ব ( )

আমরা এতক্ষণ যে ঘটনাগুলির সম্ভাব্যতা নির্ণয় করলাম সেগুলি যেমন তাস খেলা, পাশা খেলা বা মুদ্রা নিক্ষেপ - এ সকল ক্ষেত্রে সূত্র প্রয়োগ করে সম্ভাব্যতা নির্ণয় করা অনেক সহজ। কিন্তু আমাদের জীবনের এমন অনেক বিষয় আছে যেমন জন্ম, মৃত্যু, বিবাহ, রোগব্যাধি ইত্যাদি ইত্যাদি। এই ক্ষেত্রগুলিতে সূত্র প্রয়োগ করে সম্ভাব্যতা নির্ণয় করা খুবই কঠিন। তবে চেষ্টা করলে এই সব ক্ষেত্রেও সম্ভাব্যতা নির্ণয় করা যায় যা আমরা এখন আলোচনা করব।

আমরা ইতিপূর্বে আবরোহী ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করে এসেছি। আর এখন আরোহী ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয়ের চেষ্টা করব। আবরোহী ঘটনার সম্ভাব্যতা গাণিতিক পদ্ধতির প্রয়োগে নির্ণয় করা হয়েছে। কিন্তু আরোহী ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণিত হবে পর্যবেক্ষণ পদ্ধতির প্রয়োগে অর্থাৎ আরোহী ঘটনার সম্ভাব্যতা পর্যবেক্ষণ ছাড়া সম্ভবই নয়।

সরল ঘটনার আবরোহী সম্ভাব্যতা নির্ণয় করা হয় মূল গাণিতিক সূত্র ঃ f, t ইত্যাদি প্রয়োগ করে। আরোহী ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করতে গিয়েও আমাদের অনুরূপ একটি সূত্রের সাহায্য নিতে হবে তা হল ঃ m , n প্রয়োগ । কিন্তু দু রকম সম্ভাব্যতা গণনা করার পার্থক্য হল এই ঃ আরোহী গণনার যে m, n সংগ্রহ করা হয় তার উৎস হল পর্যবেক্ষণ। এখানে আমাদের মনে রাখতে হবে m , n -তে n = কত বার পর্যবেক্ষণ করা হল সে সংখ্যা, আর m = কতবার ঈপ্সিত ঘটনাটি ঘটল সে সংখ্যা।

ধরাযাক্ বার পর্যবেক্ষণে দেখা গেল বার ঘটনাটি ঘটেছে। তাহলে ঘটনাটির সম্ভাব্যতার আসন্ন মান (approximate value) m/ n বলে ধরা যায় যদি n ক্রমেই বড় হয়।

দৃষ্টান্ত ঃ

মনে করি, কোনো এলাকায় বিভিন্ন বয়সের, বিভিন্ন ধরনের ১০০০ লোকের দাঁত পরীক্ষা করে দেখা গেল, এদের মধ্যে ৭৫০ জন কোন না কোন দাঁতের রোগে ভোগে। (এখনে n = ১০০০, m = ৭৫০)। এ তথ্যের ভিত্তিতে সিদ্ধান্ত করা যায় ঃ এ এলাকায় লোকেদের দাঁতের রোগে ভোগার সম্ভাব্যতা প্রায় ৭৫০/ ১০০০ বা ৩/ ৪ । যখন বলা হয়, পশ্চিমবঙ্গের ছাত্রদের শতকরা ৭০ জন চোখের রোগে ভোগে, তখন আসলে যা বলা হয় তা হল ঃ পশ্চিমবঙ্গের ছ্যাত্রদের চোখের রোগে ভোগার সম্ভাব্যতা প্রায় ৭/ ১০ । সেরকম পরিসংখ্যানের ভিত্তিতে আমরা বলি ঃ শতকরা ৯০ জন ভারতীয় ষাট বছর পূর্ণ হওয়ার আগে মারা যায়। এ বাক্যের বক্তব্য ঃ কোনো ভারতীয়ের ষাট বছরের আগে মারা যাওয়ার সম্ভাব্যতা প্রায় ৯/ ১০ ।